Uppsala universitet
Institutionen för informationsteknologi
Avdelningen för teknisk databehandling

Lösningsförslag till tentamen i Analys av numeriska metoder, 2001-10-12

1. Visa konsistens och stabilitet. Lax-Richtmyers sats ger då att schemat är konvergent.

   Taylorutveckla operatorn D_+D_-

$$D_+D_-u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(h^4) = \left(1 + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^4) = \left(1 + \frac{h^2}{12}D_+D_-\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^4)$$

   Detta ger

$$\left(1 + \frac{h^2}{12}D_+D_-\right)\cdot\left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} - \lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f_j\right) = O(h^4)$$

   Vidare har vi att

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} = u_t + O(k)$$

   vilket ger insatt i ekvationen ovan att schemat är konsistent.

   Lösningen kan delas upp, $u(x,t) = u_h(x,t) + u_p(x)$, där $u_h(x,t)$ är lösning till problemet med homogent högerled och $u_p(x)$ är en tidsoberoende partikulärlösning, dvs lösning till $-\lambda u_{xx} = f(x)$ och påverkar inte stabiliteten. Undersök stabiliteten för det homogena problemet med Fouriermetoden. Ansätt $u_j^n = g^n e^{i\omega x}$ och utnyttja att

$$D_+D_-e^{i\omega x} = -\frac{4}{h^2}\sin^2(\frac{\omega h}{2})e^{i\omega x}$$

   Insättning och förkortning ger

$$\left(1 - \frac{4h^2}{12h^2}\sin^2(\frac{\omega h}{2})\right)\left(\frac{g-1}{k}\right) + \frac{4\lambda}{h^2}\sin^2(\frac{\omega h}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$g = 1 - \frac{4\frac{\lambda k}{h^2}\sin^2(\frac{\omega h}{2})}{1 - \frac{1}{3}\sin^2(\frac{\omega h}{2})}$$

   För stabilitet krävs $|g| \leq 1$. Vi har

$$1 \geq 1 - \frac{4\frac{\lambda k}{h^2}\sin^2(\frac{\omega h}{2})}{1 - \frac{1}{3}\sin^2(\frac{\omega h}{2})} \geq 1 - 6\frac{\lambda k}{h^2} \geq -1 \quad \text{för} \quad \frac{\lambda k}{h^2} \leq \frac{1}{3}$$

   Metoden är alltså konsistent och stabil och således konvergent för det givna villkoret.

2. Vi har variabla koefficienter men $a(x)$ är Lipschitzkontinuerlig. Frys $a(x) = a$ konstant. Dela upp problemet i två delproblem, $0 \leq x < \infty$ och $-\infty < x \leq 1$. Sätt $f(x,t) = h(x) = g(t) = 0$ och undersök delproblemen var för sig.

   Kontrollera först grundvillkoret, dvs att Leap-Frog utan randvillkor är stabil. Fourierutveckling ger att

$$|a\lambda| < 1$$

   Detta ska gälla för alla värden som a kan anta i intervallet. Maximum för $a = \pi^2$ ger $k/h < 1/\pi^2$ som stabilitetsvillkor. Övergå nu till GKSO-analys.

   Steg 1: *Resolventekvationen*
   Ansätt $v_i^n = z^n\tilde{v}_i$

$$\Rightarrow z^{n+1}\tilde{v}_i = z^{n-1}\tilde{v}_i + a\lambda z^n(\tilde{v}_{i+1} - \tilde{v}_{i-1})$$

$$z^2\tilde{v}_i = \tilde{v}_i + a\lambda z(\tilde{v}_{i+1} - \tilde{v}_{i-1})$$

Steg 2. *Karakteristiska ekvationen*
Ansätt $\tilde{v}_i = \kappa^i$

$$\Rightarrow z^2\kappa^i = \kappa^i + a\lambda z(\kappa^{i+1} - \kappa^{i-1})$$

$$(z^2-1)\kappa = a\lambda z(\kappa^2 - 1)$$

$$\kappa^2 - \frac{z^2-1}{a\lambda z}\kappa - 1 = 0$$

Steg 3. *Determinantvillkoret*
Karakteristiska ekvationen ger att rötterna uppfyller

$$\kappa_1 \cdot \kappa_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad |\kappa_1| < 1,\ |\kappa_2| > 1 \text{ eller } |\kappa_1| = |\kappa_2| = 1$$

Testa $\kappa = e^{i\theta}$ (Fourieransatsen) $\Rightarrow$ $|z| \leq 1$ pga grundantagandet. Alltså, för $|z| > 1$ gäller $|\kappa_1| < 1$ och $|\kappa_2| > 1$. Vi kan skriva lösningen som $\tilde{v}_j = \sigma_1\kappa_1^j + \sigma_2\kappa_2^j$, men $|\kappa_2| > 1$ och $v_j^n \in l_2(0,\infty) \Rightarrow \sigma_2 = 0$ bivillkor. Sök lösning på formen $\tilde{v}_j = \sigma\kappa^j$ där $|\kappa| < 1$. Sätt in ansatsen $v_j^n = z^n\sigma\kappa^j$ i randvillkoren.
För det högra randvillkoret får vi

$$z^n\sigma\kappa^j = 0$$

vilket inte ger några lösningar och påverkar således inte stabiliteten.
Det vänstra randvillkoret ger

$$z^{n+1}\sigma(1+a\lambda) = a\lambda z^{n+1}\sigma\kappa + z^n\sigma$$

$$(z - 1 - a\lambda z(\kappa - 1))\sigma = 0$$

Vi söker icke-triviala lösningar med $\sigma \neq 0$, dvs

$$z - 1 - a\lambda z(\kappa-1) = 0$$

Steg 4. *Lös ekvationerna*

$$\begin{cases} (z^2-1)\kappa = a\lambda z(\kappa^2-1) \\ z - 1 - a\lambda z(\kappa - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\kappa = 1, z = 1$$

Steg 5. *Granska lösningen*
Lösning då $|z| \to 1_+$? Karakteristiska ekvationen ger att $\kappa_1 = 1$ och $\kappa_2 = -1$ eller $\kappa_1 = -1$ och $\kappa_2 = 1$. Endast det första fallet är en lösning ($\sigma_2 = 0$). Vi vet att $|\kappa_1| < 1$ och $|\kappa_2| > 1$ för $|z| > 1$. Ansätt $z = 1+\delta$ och $\kappa = 1+\varepsilon$ med $\delta > 0$ och undersök tecknet på ε. Sätt in i karakteristiska ekvationen och försumma högre ordningens termer,

$$((1+\delta)^2 - 1)(1+\varepsilon) = a\lambda(1+\delta)((1+\varepsilon)^2 - 1)$$

$$\Rightarrow$$

$$2\delta \approx a\lambda 2\varepsilon$$

Alltså, $\varepsilon > 0$ och det är κ_2 som uppfyller ekvationerna. Vi har ingen lösning för $|z| > 1$ eller då $|z| \to 1_+$ och Leap-Frog är stabil med det föreslagna randvillkoret om $k/h < 1/\pi^2$.

3. Operatorn $D_+D_-(I - \frac{h^2}{12}D_+D_-)$ är fem punkter bred. Randvillkor behövs för alla punkter ett steg in från randen. Taylorutveckla $u(x,y)$ normalt mot randen.

   För randen $x = h_1$ får vi

$$u(h_1,y) = u(0,y) + h_1u_x(0,y) + \frac{h_1^2}{2}u_{xx}(0,y) + \frac{h_1^3}{6}u_{xxx}(0,y) + O(h_1^4)$$

Utnyttja att $u(x,y) = g(x,y)$ på randen. Som randvillkor får vi då

$$u(h_1, y) = g(0,y) + h_1 g_x(0,y) + \frac{h_1^2}{2} g_{xx}(0,y) + \frac{h_1^3}{6} g_{xxx}(0,y)$$

Pss för de övriga ränderna får vi randvillkoren

$$\begin{aligned}
u(1-h_1, y) &= g(1,y) - h_1 g_x(1,y) + \frac{h_1^2}{2} g_{xx}(1,y) - \frac{h_1^3}{6} g_{xxx}(1,y) \\
u(x, h_2) &= g(x,0) + h_2 g_y(x,0) + \frac{h_2^2}{2} g_{yy}(x,0) + \frac{h_2^3}{6} g_{yyy}(x,0) \\
u(x, 1-h_2) &= g(x,1) - h_2 g_y(x,1) + \frac{h_2^2}{2} g_{yy}(x,1) - \frac{h_2^3}{6} g_{yyy}(x,1)
\end{aligned}$$

4. Ansätt $u = U + v$ där U är en lösning till differentialekvationen och v en liten störning. Studera hur den lilla störningen påverkar lösningen. Dvs undersök stabiliteten för v. Sätt in $u = U + v$ i ekvationen och försumma högre ordningens termer i v (linjarisera ekvationen). Skriv om diffekvationen som $u_t + f'(u)u_x = 0$ och utnyttja att U är en lösning. Detta ger

$$v_t + f'(U)v_x = -f''(U)U_x v$$

Strangs sats säger att om u är tillräckligt snäll och differensmetoden D är stabil för den linjariserade ekvationen så konvergerar den också för den icke-linjära ekvationen.
Önskvärda egenskaper för ett numeriskt schema

a) *Konservativ form:* Ett schema till konserveringslagen $u_t + f(u)_x = 0$ är på konservativ form om det kan skrivas
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + \frac{h_{j+1/2}^n - h_{j-1/2}^n}{h} = 0$$
där $h_{j+1/2}^n = h(u_{j-q}^n, ..., u_{j+p}^n)$. För konsistens krävs (då $h \to 0$, $k \to 0$) att $h(u, ..., u) = f(u)$. Konservativ form garanterar att eventuella chocker får rätt hastighet i lösningen.

b) *Entropiriktig:* Ger fysikalisk rätt lösning, bryter upp expansions-chock till expansionsvåg.

c) *TVD:* Variationsminskade schema,

$$\sum_j |v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}| \leq \sum_j |v_j^n - v_{j-1}^n|$$

Förhindrar tillväxt av högfrekventa oscillationer i lösningen.

5. Felet kan uttryckas som en linjärkombination av egenvektorerna till A. På nivå l har vi då frekvenserna

$$v_\mu^l = \sqrt{2h_l}\sin(\mu\pi x) \quad \mu = 1, \ldots, n_l$$

och på nivå $l-1$
$$v_\mu^{l-1} = \sqrt{2h_{l-1}}\sin(\mu\pi x) \quad \mu = 1, \ldots, n_{l-1}$$
där $n_l = 2n_{l-1} + 1$ och $h_l = h_{l-1}/2$.
Alltså, frekvenserna $\geq n_{l-1} + 1 = \frac{n_l+1}{2}$ finns bara representerade på det fina nätet.

Applicera restriktionsoperatorn på egenvektorerna och studera vad som händer komponentvis

$$[Rv_\mu^l]_i = \frac{\sqrt{2h_l}}{4}(\sin(\mu\pi h_l(2i-1)) + 2\sin(\mu\pi h_l 2i) + \sin(\mu\pi h_l(2i+1))) = \ldots =$$

$$= \frac{\sqrt{2h_l}}{4} 2(\cos(\mu\pi h_l) + 1)\sin(\mu\pi h_l 2i) = \sqrt{2h_l}\cos^2(\frac{\mu\pi h_l}{2})\sin(\mu\pi h_{l-1} i)$$

För $\mu \geq \frac{n_l+1}{2}$ dela upp $\mu = n_l - k + 1$ där $k = 1, \ldots, n_{l-1}$. Detta ger

$$\sin((n_l - k + 1)\pi h_{l-1} i) = \sin((2(n_{l-1}+1) - k)\pi h_{l-1} i) = \sin(2\pi i - k\pi h_{l-1} i) = -\sin(k\pi h_{l-1} i)$$

och vi får

$$\left[Rv_\mu^l\right]_i = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2(\frac{\mu\pi h_l}{2})\left[v_k^{l-1}\right]_i$$

Dvs frekvens $\mu = n_l - k + 1$ på det fina nätet överlagras som frekvens k på det grova nätet och dämpas med faktorn $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2(\frac{\mu\pi h_l}{2})$. Samma utredning för direkt injektion ger

$$\left[Rv_\mu^l\right]_i = \sqrt{2h_l}\sin(\mu\pi h_l 2i) = \sqrt{2h_l}\sin(\mu\pi h_{l-1} i) =$$

$$[\mu = n_l - k + 1 = 2(n_{l-1}+1) - k]$$

$$= \sqrt{2h_l}\sin(2\pi i - k\pi h_{l-1} i) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[v_k^{l-1}\right]_i$$

Återigen, frekvens $\mu = n_l - k + 1$ på det fina nätet överlagras som frekvens k på det grova nätet men dämpas nu med faktorn $1/\sqrt{2}$ (mindre dämpning än för full viktning).