Lösningsanvisningar till tentamen i Analys av numeriska metoder, 961018

Observera att nedanstående lösningsförslag i de flesta fall är skissartade. För full poäng skulle det krävas mer detaljerade resonemang.

1. Räcker att studera rumsdelen:

$$\gamma \mathrm{D}_0\phi(x_j, t_{n+1}) + (1-\gamma)\mathrm{D}_0\phi(x_j, t_n)$$

$$= \gamma \mathrm{D}_0 \left(\phi(x_j, t_n) + \Delta t \phi_t(x_j, t_n) + O(\Delta t^2)\right) + (1-\gamma)\mathrm{D}_0\phi(x_j, t_n)$$

$$= \gamma \Delta t \mathrm{D}_0 \phi_t(x_j, t_n) + O(\Delta t^2) + \mathrm{D}_0\phi(x_j, t_n) \tag{1}$$

$$\mathrm{D}_0\Psi(x_j, t_n) = \frac{1}{2\Delta x}\left(\Psi(x_{j+1}, t_n) - \Psi(x_{j-1}, t_n)\right) = \Psi_x + O(\Delta x^2) \tag{2}$$

Insättning av (2) i (1) ger

$$\gamma \mathrm{D}_0\phi(x_j, t_{n+1}) + (1-\gamma)\mathrm{D}_0\phi(x_j, t_n)$$

$$= \gamma \Delta t \phi_{tx} + O(\Delta t \Delta x^2) + O(\Delta t^2) + \phi_x + O(\Delta x^2)$$

$$= \phi_x + O(\Delta t) + O(\Delta x^2)$$

Dvs konsistent för alla γ.

2. Ansätt $v_j^n = g^n e^{i\theta j}$

$$g - 1 = a\frac{\lambda}{2}\left(\gamma g + (1-\gamma)\right) 2i\sin\theta$$

$$g = \frac{1 + a\lambda(1-\gamma)i\sin\theta}{1 - a\lambda\gamma i \sin\theta}$$

$$|g|^2 = \frac{1 + a^2\lambda^2(1-\gamma)^2\sin^2\theta}{1 + a^2\lambda^2\gamma^2\sin^2\theta}$$

Ovillkorligt stabil om $|g| \leq 1$ för alla θ. Detta uppfylls om $(1-\gamma)^2 \leq \gamma^2$. Dvs om $1 - 2\gamma \leq 0 \Leftrightarrow \gamma \geq 1/2$.

3. Karakteristiska ekvationen:

$$(z^2-1)\kappa = a\lambda z(\kappa^2-1) \tag{1}$$

Determinantvillkoret:

$$z^2 = 2z\kappa - \kappa^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(z-\kappa)^2 = 0 \tag{2}$$

Ekvation (2) ger $\kappa = z$, insättning i (1) ger sedan:

$$(z^2-1)z = a\lambda z(z^2-1) \tag{3}$$

Ekvation (3) är uppfylld för alla z om $a\lambda = 1$. Men $a\lambda < 1$ pga stabilitetsvillkoret för begynnelsevärdesproblemet. För $a\lambda < 1$ kan (3) endast gälla om $(z^2-1)z = 0$, dvs $z = \pm 1$, $z = 0$. Lösningen $z = 0$ ointressant ur stabilitetssynpunkt. Återstår $z = 1$, $\kappa = 1$ och $z = -1$, $\kappa = -1$.

Störningsräkning:

$$\begin{aligned} z &= (\pm 1)(1+\delta), \quad \delta > 0 \\ \kappa &= (\pm 1)(1+\epsilon) \end{aligned}$$

Insättning i (1) ger:

$$\left((\pm 1)^2(1+\delta)^2 - 1\right)(\pm 1)(1+\epsilon) = a\lambda(\pm 1)(1+\delta)\left((\pm 1)^2(1+\epsilon)^2 - 1\right)$$

Strykning av högre ordningens termer ger:

$$2\delta \approx a\lambda 2\epsilon \quad \Rightarrow \quad \epsilon \approx \frac{\delta}{a\lambda} > 0$$

Alltså: i båda fallen svarar κ mot κ_2. Metoden är stabil för alla λ som uppfyller stabilitetsvillkoret för begynnelsevärdesproblemet.

4. Diagonalisera A.

Egenvärden: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$

Egenvektorer: $\mathbf{e}_1 = [\ 1 \quad 1\ ]^T$, $\mathbf{e}_2 = [\ 1 \quad -1\ ]^T$

Diagonaliserande matris,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \Lambda$$

Variabelbyte $W = T^{-1}V$ ger

$$W_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left(W_{j+1}^n + W_{j-1}^n\right) + \Delta t \Lambda \mathrm{D}_0 W_j^n$$

Studera nu det skalära problemet. Ansätt $w_j^n = g^n e^{i\theta j}$.

$$\Rightarrow \quad g = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) + \alpha\frac{\lambda}{2}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = \cos\theta + \alpha\lambda i \sin\theta$$

$$|g|^2 = \cos^2\theta + \alpha^2\lambda^2\sin^2\theta = 1 - (1 - \alpha^2\lambda^2)\sin^2\theta$$

Stabilt för $|\alpha\lambda| \leq 1 \Leftrightarrow |\lambda| \leq 1$. Dvs vi måste välja $\Delta t \leq 0.01$.

5. Konvergens innebär att felet $e^n = u - v^n$ går mot noll då $n \to \infty$ (u exakt lösning). Konvergenshastighet handlar om hur <u>fort</u> felet avtar.

Första påståendet: Utveckla initialfelet e^0 i egenvektorerna w till $G(\nu)$.

$$e^0 = \sum_{j=1}^{N} c_j w_j$$

Varje iteration ger $e^{n+1} = Ge^n$, dvs vi får

$$e^n = \sum_{j=1}^{N} c_j \lambda_j^n w_j$$

I denna summa dominerar asymptotiskt ($n \to \infty$) den term där egenvärdet ger spektralradien.

Andra påståendet:

$$e^{n+1} = Ge^n \quad \Rightarrow \quad ||e^n|| \leq ||G|| \cdot ||e^{n-1}||$$

Felet minskar med en faktor $||G||$ i iteration n.

6. Det räcker att studera principaldelen av (1).

Fouriermetoden: Fouriertransformera i rummet

$$\hat{V}^{n+1} - \hat{V}^n = \frac{\Delta t}{2}\hat{Q}\left(\hat{V}^{n+1} + \hat{V}^n\right) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{V}^{n+1} = \hat{G}\hat{V}^n$$

Normen av amplifikationsmatrisen $\hat{G}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ skall uppskattas för alla $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Svårt!!

Energimetoden:

$$(U, V) = \sum_{j=1}^{N_x}\sum_{k=1}^{N_y}\sum_{l=1}^{N_z} U_{jkl}^T V_{jkl}\Delta x \Delta y \Delta z, \quad ||V|| = \sqrt{(V, V)}$$

Multiplicera equation (1) med $V_{jkl}^{n+1} + V_{jkl}^n$ och summera över j,k,l.

$$||V^{n+1}||^2 - ||V^n||^2 = \frac{\Delta t}{2}\left(V^{n+1} + V^n, Q(V^{n+1} + V^n)\right) \tag{2}$$

Skriv om högerledet i (2) som

$$(W, QW) = (W, AD_{0x}W) + (W, BD_{0y}W) + (W, CD_{0z}W)$$

där $W = V^{n+1} + V^n$.

$$(W, AD_{0x}W) = \sum_{jkl} W_{jkl}^T A\left(W_{j+1,k,l} - W_{j-1,k,l}\right)$$

$$= \sum_{kl}\left[\sum_{j=1}^{N_x} W_{jkl}^T A W_{j+1,k,l} - \sum_{j=0}^{N_x-1} W_{j+1,k,l}^T A W_{jkl}\right] \tag{3}$$

Utnyttja att

$$V^T A W = (\text{ty } A \text{ symmetrisk}) = V^T A^T W = W^T A V$$

Insättning i (3) ger

$$(W, AD_{0x}W) = \sum_{kl}\left[W_{N_x,k,l}^T A W_{N_x+1,k,l} - W_{1kl}^T A W_{0kl}\right] = (\text{r.v.}) = 0$$

Analogt visas $(W, BD_{0y}W) = 0$ och $(W, CD_{0z}W) = 0$. Vi får slutligen

$$(W, QW) = 0 \quad \Rightarrow \quad ||V^{n+1}|| = ||V^n||$$

Dvs normen växer inte i tiden, vi har ett ovillkorligt stabilt schema.