Lösningsanvisningar till tentamen i Analys av numeriska metoder, 971017

Observera att nedanstående lösningsförslag är skissartade. För full poäng skulle det krävas mer detaljerade resonemang.

1. Se kurslitteraturen för genomgång av standardförfarandet vid undersökning av noggrannhetsordning. I vårt fall blir:

$$P_{k,h}\Phi - P\Phi = \mathcal{O}\left(\Delta t\right) + \mathcal{O}\left(\Delta x^2\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\right)$$

   Eftersom vi har $\Delta t = \lambda \Delta x$, där λ antas vara en konstant, gäller att $\mathcal{O}\left(\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\right) = \mathcal{O}\left(\Delta x\right)$. Noggrannhetsordningen är alltså (1,1).

2. Se kurslitteraturen för genomgång av standardförfarandet. I vårt fall blir:

$$g(\theta) = 1 - s\sin^2\frac{\theta}{2} + ia\lambda\sin\theta.$$

   Sålunda är

$$|g(\theta)|^2 = \left(1 - s\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2 + (a\lambda\sin\theta)^2.$$

   Av detta framgår att om $s = -1$ finns θ så att $|g(\theta)| > 1$, oberoende av värdet på λ. Av de två alternativen $s = -1$ och $s = 1$ är det alltså det senare som skall väljas. För $s = 1$ finns det λ så att metoden blir stabil, d.v.s. så att $|g(\theta)| \leq 1$ för alla θ.

   För dissipativitet gäller det ytterligare kravet att $|g(\theta)| < 1$ för alla $\theta \neq 0$. Om man i uttrycket för $|g(\theta)|^2$ utnyttjar att $sin^2\theta = \left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^2$, och vidare att $\cos^2\frac{\theta}{2} = 1 - \sin^2\frac{\theta}{2}$, får man

$$|g(\theta)|^2 = 1 - [2 - \sin^2\frac{\theta}{2} - 4(a\lambda)^2\left(1 - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)]\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

   Man ser direkt att $|g(0)|^2 = 1$ och $|g(\pi)|^2 = 0$. Vidare krävs för övriga θ att uttrycket inom hakparentes är positivt. D.v.s. λ måste väljas så att

$$(a\lambda)^2 < \frac{1}{2}\frac{1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}}{1 - \sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

   Detta är uppfyllt för alla $\theta \neq 0$ och $\theta \neq \pi$ om $\lambda|a| \leq 1/\sqrt{2}$, vilket alltså är villkoret på λ för att metoden skall vara dissipativ.

3. Se kurslitteraturen för genomgång av standardförfarandet. I vårt fall blir karakteristiska ekvationen

$$(z-1)\kappa = a\lambda(\kappa^2-1)+\frac{1}{4}(\kappa-1)^2.$$

Determinantvillkoret blir

$$(\kappa-1)^2=0.$$

Den enda kritiska lösningen är alltså $\kappa = 1$, $z = 1$. Vi gör en störningsräkning för att avgöra om κ i detta fall har närmat sig enhetscirkeln utifrån eller inifrån när z närmade sig enhetscirkeln utifrån. Störningsräkningen går till så att vi i karakteristiska ekvationen sätter in $z = 1+\delta$, $\delta > 0$, och $\kappa = 1+\epsilon$. Efter strykning av högre ordnings termer får vi $\epsilon \approx \delta/(a\lambda) > 0$. Alltså närmar sig κ enhetscirkeln utifrån. Sådana lösningar har vi sorterat bort i ett tidigare skede av analysen och slutsatsen blir att differensmetoden med de givna randvillkoren är stabil för de värden på λ som gör differensmetoden stabil för det rena begynnelsevärdesproblemet.

4. Uppenbarligen har iterationsmatrisen $G_{J,\omega}$ samma egenvektorer som A och egenvärdena blir

$$\lambda_{\mu,\omega} = 1-2\omega\sin^2\frac{\mu\pi h}{2}.$$

Konvergenshastigheten för frekvens μ (d.v.s. hur snabbt felkomponenter av frekvens μ elimineras ur felet) ges av $\lambda_{\mu,\omega}$. Låt initialfelet vara $\sum c_\mu w_\mu$ uttryckt i den bas som utgörs av egenvektorerna w_μ. Efter k iterationer kommer den felterm som svarar mot frekvens μ att vara $\lambda^k_{\mu,\omega} c_\mu w_\mu$. Villkoret för att denna felterm skall vara högst ϵ är, om vi antar $\|w_\mu\| = 1$,

$$\lambda_{\mu,\omega} c_\mu \le \epsilon$$

och det antal iterationer som behövs för att uppnå detta är

$$N_{\mu,\omega} \ge -\ln(\epsilon/c_\mu)/\ln(\lambda\mu,\omega).$$

För låga frekvenser får vi alltså, efter taylorutveckling av ln-termerna:

$$N_{\mu,\frac{1}{2}} \approx 2N_{\mu,1},$$

d.v.s. dubbelt så många iterationer för $\omega = 1/2$ som för $\omega = 1$.

5. Ett sätt att angripa denna uppgift är att genomföra den analys vi i kursen gjort av hur differensoperatorns noggrannhetsordning påverkar exekveringstiden (givet att man önskar en viss noggrannhet ϵ vid sluttiden T). Den analysen visar att högre noggrannhetsordning ger lägre exekveringstid. Alltså är p-adaptivitet att föredra om man enbart ser till denna aspekt. Detaljerna i analysen framgår av kurslitteraturen.

6. Konsistensen innebär att $P_{k,h}\Phi - P\Phi \to 0$ när $h, k \to 0$. I vårt fall är

$$P_{k,h}\Phi = \sum_{\sigma=-1}^{s} \sum_{\nu=-l}^{r} \alpha_{\sigma\nu} \Phi(x_{j+\nu}, t_{n-\sigma}).$$

   Efter taylorutveckling av Φ runt (x_j, t_n) ser vi att ett nödvändigt villkor för konsistens är

$$\sum_{\sigma=-1}^{s} \sum_{\nu=-l}^{r} \alpha_{\sigma\nu} = 0.$$

   Betrakta nu stabilitetsanalys med normal mode-metoden. Insättning av $z = 1$, $\kappa = 1$ i den karakteristiska ekvationen ger

$$\sum_{\sigma=-1}^{s} \sum_{\nu=-l}^{r} \alpha_{\sigma\nu} = 0,$$

   vilket alltså är sant p.g.a. konsistensen. Alltså är $z = 1$, $\kappa = 1$ en lösning till karakteristiska ekvationen.