Lösningsanvisningar till tentamen i Analys av numeriska metoder, 981016

Observera att nedanstående lösningsförslag är skissartade. För full poäng skulle det i vissa fall krävas mer detaljerade resonemang.

1. **a)** A har reella och skilda egenvärden $\Rightarrow$ Hyperboliskt system.

   b) Egenvektorer

   $$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Diagonalisera systemet med $T = (v_1 \; v_2)$,

   $$T^{-1}u_t + T^{-1}ATT^{-1}u_x = 0$$

   $$\Leftrightarrow$$

   $$w_t + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} w_x = 0, \quad w = T^{-1}u.$$

   Karakteristikor $\xi_1 = x - t$ och $\xi_2 = x + t$. Specificera de ingående karakteristikorna,

   $$\begin{aligned} w_1(0,t) &= \alpha_1(t) w_2(0,t) + g_1(t) \\ w_2(1,t) &= \alpha_2(t) w_1(1,t) + g_2(t) \end{aligned}$$

   Vi har här även lagt till de utgående karakteristikorna för att specificera de ingående. Transformation tillbaka till det ursprungliga systemet ger,

   $$\begin{aligned} u_1(0,t) - u_2(0,t) &= \beta_1(t)(u_1(0,t) + u_2(0,t)) + h_1(t) \\ u_1(1,t) + u_2(1,t) &= \beta_2(t)(u_1(1,t) - u_2(1,t)) + h_2(t) \end{aligned}$$

   c) Lösningen dämpas/växer/oscillerar men transporteras fortfarande längs karakteristikorna. Randvillkoren behöver ej omformuleras.

2. **a)** Välj $\delta > 0$. Det modifierade Leap-Frog schemat approximerar ekvationen $u_t - u_x = -\varepsilon u_{xxxx}$ vilken är parabolisk om $\varepsilon > 0$. Paraboliska ekvationer dämpar ut högfrekventa oscillationer med tiden.

b) Fourieransatsen $v_j^n = g^n e^{i\omega x_j}$ insatt i schemat ger,

$$g = \lambda i \sin(\omega h) \pm \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\omega h) - 16\delta \sin^4(\frac{\omega h}{2})}$$

Studera rotuttrycket,

$$h(\omega) = 1 - \lambda^2 \sin^2(\omega h) - 16\delta \sin^4(\frac{\omega h}{2}) =$$

$$1 - 4\lambda^2 \sin^2(\frac{\omega h}{2})(1 - \sin^2(\frac{\omega h}{2})) - 16\delta \sin^4(\frac{\omega h}{2})$$

Inför $x = \sin^2(\frac{\omega h}{2})$, $x \in [0,1]$,

$$\Rightarrow h(\omega) = f(x) = 1 - 4\lambda^2 x(1-x) - 16\delta x^2 =$$

$$1 - 4\lambda^2 x + 4(\lambda^2 - 4\delta)x^2$$

Beräkna när $f(x) > 0 \Rightarrow$ Hitta min$f(x)$.

$$f'(x) = -4\lambda^2 + 8(\lambda^2 - 4\delta)x = 0$$

$$\Rightarrow x^* = \frac{4\lambda^2}{8(\lambda^2 - 4\delta)}, \quad \text{min om } 4\delta < \lambda^2 \Rightarrow \delta < 0.2025$$

$$f(x^*) = 1 - \frac{\lambda^4}{\lambda^2 - 4\delta} > 0 \quad \text{om } 1 > \frac{\lambda^4}{\lambda^2 - 4\delta}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\delta < \frac{\lambda^2(1-\lambda^2)}{4} = 0.038475, \quad (x^* = 0.617 \in [0,1])$$

$$\Rightarrow |g|^2 = \lambda^2 \sin^2(\omega h) + 1 - \lambda^2 \sin^2(\omega h) - 16\delta \sin^4(\frac{\omega h}{2}) = 1 - 16\delta \sin^4(\frac{\omega h}{2})$$

Vi har stabilt och dissipativt schema av ordning 4 om $\delta < \frac{\lambda^2(1-\lambda^2)}{4}$.

3. **a)** Approximera först med D_+D_-. Detta ger,

$$D_+D_-u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(h^4)$$

Approximera nu $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ med $(D_+D_-)^2 u$.

$$\Rightarrow (D_+D_-)^2 u = D_+D_-(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(h^4)) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(h^2)$$

Sätt in detta i den första Taylorutvecklingen,

$$D_+D_-u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12}(D_+D_-)^2 u + O(h^4)$$

$$\Rightarrow D_+D_-(1 - \frac{h^2}{12}D_+D_-)u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^4)$$

b) Explicita scheman kräver vanligtvis $\Delta t/\Delta x^2 \leq const$ för att vara stabila. Det innebär att vi automatiskt får hög noggrannhet i tiden. Välj ett schema med lägre noggrannhetsordning i tiden än i rummet. Detta ger ett balanserat schema som är effektivt. Implicita scheman är ofta ovillkorligt stabila. Välj ett schema med samma eller högre noggrannhet i tiden. Vi kan då ta stora tidssteg utan att noggrannheten förstörs. Not, implicita metoder är ofta effektivare än explicita metoder för paraboliska problem.

4. Kontrollera grundantagandet, dvs att problemet utan randvillkor är stabilt. Fouriertransformera både i x- och y-led:

$$\hat{u}^{n+1} - \hat{u}^n = \frac{k}{2}(\frac{i\sin\theta_1}{h_1} + \frac{i\sin\theta_2}{h_2})(\hat{u}^{n+1} + \hat{u}^n)$$

Ansätt $\hat{u}^n = g^n$ och lös ut g,

$$\Rightarrow g = \frac{1 + i\frac{k}{2}\left(\frac{\sin\theta_1}{h_1} + \frac{\sin\theta_2}{h_2}\right)}{1 - i\frac{k}{2}\left(\frac{\sin\theta_1}{h_1} + \frac{\sin\theta_2}{h_2}\right)}$$

Metoden är ovillkorligt stabil, $|g| = 1$ oberoende av k, h_1 och h_2.

Normal-mode analys: Fouriertransformering i y-led ger,

$$\hat{u}_i^{n+1} - \hat{u}_i^n = \frac{k}{2}(D_{0x} + \frac{i\sin\theta_2}{h_2})(\hat{u}_i^{n+1} + \hat{u}_i^n)$$

Steg 1. *Resolventekvationen*
Ansätt $\hat{u}_i^n = z^n\tilde{v}_i$

$$\Rightarrow (z-1)\tilde{v}_i = (z+1)\left(\frac{\lambda_1}{4}(\tilde{v}_{i+1} - \tilde{v}_{i-1}) + i\frac{\lambda_2}{2}\tilde{v}_i\sin\theta_2\right)$$

där $\lambda_1 = k/h_1$ och $\lambda_2 = k/h_2$.

Steg 2. *Karakteristiska ekvationen*
Ansätt $\tilde{v}_i = \kappa^i$

$$\Rightarrow (z-1)\kappa = (z+1)\left(\frac{\lambda_1}{4}(\kappa^2-1) + i\frac{\lambda_2}{2}\kappa\sin\theta_2\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\kappa^2 + \kappa\left(2i\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\sin\theta_2 - \frac{4}{\lambda_1}\frac{(z-1)}{(z+1)}\right) - 1 = 0$$

Steg 3. *Determinantvillkoret*
Karakteristiska ekvationen ger att rötterna uppfyller

$$\kappa_1 \cdot \kappa_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad |\kappa_1| < 1,\ |\kappa_2| > 1 \text{ eller } |\kappa_1| = |\kappa_2| = 1$$

Testa $\kappa = e^{i\theta}$ (Fourieransatsen) $\Rightarrow$ $|z| = 1$ pga grundantagandet. Alltså, för $|z| > 1$ gäller $|\kappa_1| < 1$ och $|\kappa_2| > 1$. Vi kan skriva lösningen som $\tilde{v}_j = \sigma_1\kappa_1^j + \sigma_2\kappa_2^j$, men $|\kappa_2| > 1$ och $v_j^n \in l_2(0,\infty) \Rightarrow \sigma_2 = 0$ bivillkor. Sök lösning på formen $\tilde{v}_j = \sigma\kappa^j$ där $|\kappa| < 1$. Sätt in ansatsen $\hat{v}_j^n = z^n\sigma\kappa^j$ i randvillkoret,

$$z^n\sigma = 2z^n\sigma\kappa - z^n\sigma\kappa^2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sigma(\kappa-1)^2 = 0 \quad \sigma \neq 0$$

Steg 4. *Lös ekvationerna*

$$\begin{cases} (z-1)\kappa = (z+1)\left(\frac{\lambda_1}{4}(\kappa^2-1) + i\frac{\lambda_2}{2}\kappa\sin\theta_2\right) \\ \sigma(\kappa-1)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\kappa = 1, \quad z = \frac{1 + i\frac{\lambda_2}{2}\sin\theta_2}{1 - i\frac{\lambda_2}{2}\sin\theta_2} \quad (|z| = 1)$$

Steg 5. *Granska lösningen*
Lösning då $|z| \to 1_+$? Karakteristiska ekvationen ger att $\kappa_1 = 1$ och $\kappa_2 = -1$ eller $\kappa_1 = -1$ och $\kappa_2 = 1$. Endast det första fallet är en lösning ($\sigma_2 = 0$). Ledningen säger att κ_1 och κ_2 är kontinuerliga funktioner av θ_2. Det innebär att κ_1 eller κ_2 inte kan ändras från -1 till $+1$ diskontinuerligt då θ_2 varierar. Eftersom $\kappa = 1$ oberoende av

θ_2 kan vi välja ett godtyckligt värde, t.ex. $\theta_2 = 0$ eller π, för att se vilken av rötterna som uppfyller ekvationerna. Ansätt $z = 1 + \delta$ och $\kappa = 1 + \varepsilon$. Sätt in i karakteristiska ekvationen och försumma högre ordningens termer,

$$(1 + \delta - 1)(1 + \varepsilon) = (1 + \delta + 1)(\frac{\lambda_1}{4}((1 + \varepsilon)^2 - 1))$$

$$\Rightarrow$$

$$\delta \approx \lambda_1 \varepsilon$$

Alltså, $\varepsilon > 0$ och det är κ_2 som uppfyller ekvationerna. Vi har ingen lösning för $|z| > 1$ eller då $|z| \to 1_+$ och Crank-Nicolson är ovillkorligt stabil med det föreslagna randvillkoret.

5. Betrakta den skalära konserveringslagen $u_t + f(u)_x = 0$, där $f(u)$ är icke-linjär. Önskvärda egenskaper för ett numeriskt schema

   (a) *Konservativ form:* Ett schema till konserveringslagen ovan är på konservativ form om det kan skrivas

   $$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + \frac{h_{j+1/2}^n - h_{j-1/2}^n}{h} = 0$$

   där $h_{j+1/2}^n = h(u_{j-q}^n, ..., u_{j+p}^n)$. För konsistens krävs (då $h \to 0$, $k \to 0$) att $h(u, ..., u) = f(u)$. Konservativ form garanterar att eventuella chocker får rätt hastighet i lösningen.

   (b) *Entropiriktig:* Ger fysikalisk rätt lösning, bryter upp expansionschock till expansionsvåg.

   (c) *TVD:* Variationsminskade schema,

   $$\sum_j |v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}| \leq \sum_j |v_j^n - v_{j-1}^n|$$

   Förhindrar tillväxt av högfrekventa oscillationer i lösningen.

Exempel på schema som är på konservativ form, ger entropiriktig lösning och är TVD, Engquist-Osher:

$$h_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}\Big(f(u_j^n) + f(u_{j+1}^n)\Big) - \frac{1}{2}\int_{u_j^n}^{u_{j+1}^n} |f'(u)| du.$$

6. Bilda diagonaliserande matris $Q = (v_1\ v_2\ \cdots\ v_n)$. Egenvektorerna är ortogonala vilket medför att Q är ortogonal ($Q^{-1} = Q^T$). Högerledet kan skrivas som $f = \pi^2 \sin \pi x = \frac{\pi^2}{\sqrt{2h}} v_1$. Lösningen u kan då beräknas genom att diagonalisera system

$$Au = f \quad \Leftrightarrow \quad Q^T A Q Q^T u = Q^T f \quad \Leftrightarrow \quad D Q^T u = b$$

där

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} \pi^2/\sqrt{2h} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösningen u fås då som

$$u = Q D^{-1} b = \frac{\pi^2}{\lambda_1 \sqrt{2h}} v_1 = \frac{\pi^2}{\lambda_1} \sin \pi x$$

Taylorutveckla

$$\lambda_1 = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi h}{2}\right) = \frac{4}{h^2}\left(\frac{\pi h}{2} - \frac{(\pi h/2)^3}{3!} + \ ...\right)^2 \approx$$

$$\approx \pi^2 - \frac{4}{h^2} \cdot \frac{\pi^4 h^4}{2^3 \cdot 3!} = \pi^2 - \frac{\pi^4 h^2}{12}$$

Vidare

$$\frac{\pi^2}{\lambda_1} \approx \frac{1}{1 - \frac{\pi^2 h^2}{12}} \approx 1 + \frac{\pi^2 h^2}{12}$$

Slutligen

$$\|\phi - u\|_2 \approx \sqrt{\sum_i |\sin \pi x_i - (1+\varepsilon) \sin \pi x_i|^2 \cdot h} = |\varepsilon| \cdot \|\phi\|_2$$

där $\varepsilon = \pi^2 h^2/12 \approx 8 \cdot 10^{-3}$ för $h = 0.1$.