Uppsala universitet
Institutionen för informationsteknologi
Avdelningen för teknisk databehandling

Tentamen: Analys av numeriska metoder, 2001-10-12

Skrivtid: $15^{00} - 20^{00}$
Hjälpmedel: Mathematical Handbook
Varje uppgift kan ge 6 poäng. För full poäng krävs fullständiga räkningar och motivering av resonemang.

1. Givet differentialekvationen
$$u_t - \lambda u_{xx} = f(x) \quad \lambda > 0$$
på intervallet $x \in [\,0\,,1\,]$ med periodiska randvillkor, applicerar vi det numeriska schemat
$$\left(1 + \frac{h^2}{12}D_+D_-\right) \cdot \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k}\right) - \lambda D_+D_-u_j^n = \left(1 + \frac{h^2}{12}D_+D_-\right) f_j$$
Visa att schemat är *konvergent* för $\frac{\lambda k}{h^2} \leq \frac{1}{3}$. (Ledning: Visa att $D_+D_-u = (1 + \frac{h^2}{12}D_+D_-)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h^4)$)

2. Vi vill lösa problemet
$$\begin{aligned} &u_t - a(x) \cdot u_x = f(x,t), \quad 0 < x < 1 \\ &u(x,0) = h(x) \\ &u(1,t) = g(t) \end{aligned}$$
där $a(x) = \pi^2 \cos(\frac{\pi x}{2})$. Vi använder Leap-Frog med det numeriska randvillkoret
$$v_0^{n+1}(1 + a_{1/2}\lambda) = a_{1/2}\lambda v_1^{n+1} + v_0^n$$
där $a_{1/2} = (a(x_0) + a(x_1))\,/2$ och $\lambda = dt/dx$.
Undersök för vilka λ som den numeriska metoden är stabil. Använd GKSO-analys.

3. $D_+D_-(I - \frac{h^2}{12}D_+D_-)v_j$ approximerar d^2v/dx^2 med 4:e ordningens noggrannhet. Vi vill använda denna operator för att få en fjärde ordningens approximation till problemet
$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = f, \;\; 0 < x < 1, \; 0 < y < 1 \\ &u = g(x,y) \;\; \text{på randen}, \quad g(x,y) \in C^\infty \end{aligned}$$
I vilka punkter behövs extra numeriska randvillkor? Härled 4:e ordningens randvillkor för dessa punkter.

4. Stabilitetsteorin från linjära problem kan under vissa förhållanden tillämpas på icke-linjära problem, beskriv när och hur. Du kan behandla det skalära modellproblemet $u_t + f(u)_x = 0$, där $f(u)$ är icke-linjär i u.

   Icke-linjära problem kräver dessutom speciella egenskaper (utöver konsistens och stabilitet) hos det numeriska schemat för att dessa ska ge en bra lösning. Ge exempel på tre sådana egenskaper och förklara innebörden hos dem.

5. Betrakta modellproblemet
$$\begin{aligned} -\phi'' &= \pi^2 \sin \pi x, \qquad 0 < x < 1, \\ \phi(0) &= \phi(1) = 0 \end{aligned}$$
Om ekvationen diskretiseras med D_+D_- får vi det linjära ekvationssystemet $Au = f$, där
$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (\,n \times n\,).$$

Vi vill nu lösa systemet med en l-nivås *multigridmetod*. En av ideerna bakom multigrid är att först dämpa de höga frekvenserna i felet med en enkel iterationsmetod (t.ex. Jacobi) och sedan föra över lösningen till ett glesare nät. Om de höga frekvenserna inte dämpas ut helt vad händer med dem vid restriktionen? Hur kommer de in i lösningen i på det grova nätet. Gör en matematisk utredning. Antag att vi använder restriktionsoperatorn med full viktning. Gör sedan samma analys med direkt injektion som restriktion samt jämför resultaten. Till din hjälp har du att egenvektorerna till A ges av

$$v_\mu = \sqrt{2h} \begin{bmatrix} \sin(\mu\pi 1h) \\ \sin(\mu\pi 2h) \\ \vdots \\ \sin(\mu\pi nh) \end{bmatrix}$$

med motsvarande egenvärden $\lambda_\mu = \frac{4}{h^2}\sin^2(\frac{\mu\pi h}{2})$, $\mu = 1, \ldots, n$.

Lycka till!