Uppsala Universitet
Institutionen för
TEKNISK DATABEHANDLING

Tentamen i Analys av Numeriska Metoder, 1996-10-18
Skrivtid: 15^{00} - 21^{00}
Hjälpmedel: Mathematical Handbook

Varje uppgift kan ge 5 poäng. För full poäng krävs fullständiga räkningar och motivering av resonemang.

1. Formeln

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = a\left(\gamma D_0 v_j^{n+1} + (1-\gamma) D_0 v_j^n\right)$$

beskriver en hel familj av differensmetoder. Med $\gamma = 0$ fås t.ex. Eulers framåtdifferensmetod, $\gamma = 1$ ger Euler bakåt och $\gamma = 1/2$ ger Crank-Nicolsons metod.

Visa att varje val av γ i formeln ger en metod som är konsistent med $u_t = au_x$.

2. Nu studerar vi stabiliteten för metoderna ovan. Antag periodiska randvillkor, så att fourierteknik kan användas. För vilka γ får vi en ovillkorligt stabil metod?

3. Begynnelse-randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} u_t &= au_x \qquad 0 < x < \infty, \quad 0 < t, \quad 0 < a \\ u(x,0) &= f(x) \\ u &\in \mathcal{L}_2(0,\infty) \end{aligned}$$

approximeras med

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2\Delta t} = aD_0 v_j^n, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

$$
\begin{aligned}
v_j^0 &= f_j \\
v_0^{n+1} &= 2v_1^n - v_2^{n-1} \\
v &\in l_2(0,\infty)
\end{aligned}
$$

Genomför stabilitetsanalys m.h.a. normal mode-metoden.

4. Vågekvationen $u_{tt} = u_{xx}$ kan skrivas som ett första ordningens system:

$$
\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}_x,
$$

där $\phi = u_t$, $\psi = u_x$.
Vi skriver detta $W_t = AW_x$, där

$$
W = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},
$$

och löser problemet med Lax-Friedrichs metod:

$$
V_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left(V_{j+1}^n + V_{j-1}^n\right) + \Delta t A D_0 V_j^n.
$$

Vi använder ett beräkningsnät med $\Delta x = 0.01$ och löser problemet med periodiska begynnelsedata och periodiska randvillkor. Hur stort kan vi då välja Δt?

5. I kompendieavsnittet om multigridmetoder sägs på ett ställe (Ö 12.4) att:

> *Spektralradien [till $G(\nu)$] är ett uttryck för den asymptotiska konvergenshastigheten. Konvergenshastigheten efter ett litet antal iterationer beskrivs bättre av $\|G(\nu)\|_2$.*

De två meningarna ovan innehåller varsitt påstående. Visa att dessa påståenden är korrekta.

6. Vi skall lösa det hyperboliska systemet

$$
U_t = AU_x + BU_y + CU_z + F(x,y,z),
$$

där U och F är $d \times 1$-vektorer; A, B och C är konstanta och symmetriska $d \times d$-matriser.

Approximera rumsderivatorna med D_0 och gör tidsstegning med Crank-Nicolsons metod, ger:

$$\frac{V_{j,k,l}^{n+1} - V_{j,k,l}^{n}}{\Delta t} = \frac{1}{2} Q \left(V_{j,k,l}^{n+1} + V_{j,k,l}^{n} \right) + F_{j,k,l}. \tag{1}$$

Din uppgift är att studera stabiliteten för (1), med periodiska randvillkor. Du får inte införa några förenklingar som innebär inskränkningar av analysens räckvidd. (Analysen skall m.a.o. vara giltig för (1) och inte avse ett förenklat modellproblem.)

Gör följande:

- Föreslå två alternativa tekniker för att genomföra analysen ovan. De tekniker du nämner skall vara sådana som verkligen går att tillämpa på (1) och inte bara på modellproblem.
- Visa *skissartat* hur det skulle gå till att använda respektive teknik i fallet (1).
- Nämn för- och nackdelar med respektive teknik.
- Utför analysen *i detalj* med den teknik du finner enklast i detta fall. Analysen skall leda till en klar slutsats om stabiliteten. Det räcker alltså inte med ett löst resonemang.