

**Tentamen i Analys av Numeriska Metoder, 1997-10-17**

**Skrivtid:** 08<sup>00</sup> - 14<sup>00</sup>

**Hjälpmedel:** Mathematical Handbook

Varje uppgift kan ge 5 poäng. För full poäng krävs fullständiga räkningar och motivering av resonemang.

**1. Differensmetoden**

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = aD_0 v_j^n$$

är konsistent med  $u_t = au_x$ , men tyvärr är metoden instabil för varje val av  $\lambda = \Delta t/\Delta x$ .

Ett sätt att stabilisera metoden är att i dess högerled lägga till en term:

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = aD_0 v_j^n + \frac{s}{4} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} D_+ D_- v_j^n, \quad (1)$$

där  $s$  är  $+1$  eller  $-1$  (se uppgift 2 nedan). Vilken noggrannhetsordning har differensmetoden (1)?

**2.** Nu skall du med fourieranalys undersöka stabiliteten hos (1) för det rena begynnelsevärdesproblemet. Konstanten  $s$  skall vara *antingen*  $+1$  eller  $-1$ . För vilket av dessa värden på  $s$  går det att välja  $\lambda$  så att (1) blir stabil? Givet detta värde på  $s$ : hur skall  $\lambda$  väljas för att metoden skall bli *dissipativ*?

**3. Begynnelse-randvärdesproblemet**

$$\begin{aligned} u_t &= au_x & 0 < x < \infty, & \quad 0 < t, \quad 0 < a \\ u(x, 0) &= f(x) \\ u &\in \mathcal{L}_2(0, \infty) \end{aligned}$$

approximeras med (1), med begynnelsedata som för det kontinuerliga problemet, samt med randvillkor:

$$\begin{aligned}v_0^{n+1} &= 2v_1^{n+1} - v_2^{n+1} \\v &\in \ell_2(0, \infty)\end{aligned}$$

Genomför stabilitetsanalys m.h.a. normal mode-metoden.

4. Betrakta det endimensionella modellproblemet  $-u''(x) = f(x)$ , på enhetskvadraten och med  $u(x) = 0$  på randen. Vi inför ett ekvidistant beräkningsnät med  $n + 2$  punkter (inklusive randpunkterna) och med steglängd  $h = 1/(n + 1)$ . Om differentialekvationen diskretiseras med centrerade finita differenser av andra ordningens noggrannhet får man ett lineärt ekvationssystem  $Ax = f$ , där  $f$  är en  $n \times 1$ -vektor som innehåller  $f(x)$  evaluerad i de inre nätpunkterna. Koefficientmatrisen  $A$ ,  $n \times n$ , är tridiagonal, med element  $2/h^2$  i huvuddiagonalen och  $-1/h^2$  i de två diagonalerna närmast huvuddiagonalen. Egenvärdena till  $A$  är

$$\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\mu\pi h}{2}, \quad \mu = 1, \dots, n.$$

De motsvarande egenvektorerna  $w_\mu$  är diskreta representationer av  $\sin \mu\pi x$  och  $\mu$  kan alltså ses som en frekvens.

I kursen har vi studerat multigridmetoder för lösning av detta problem. I det sammanhanget har vi utnyttjat dämpade Jacobis metod, med iterationsmatris

$$G_{J,\omega} = I - \omega \frac{1}{2} h^2 A.$$

Med  $\omega = 1/2$  konvergerar metoden snabbt för de höga frekvenserna. Din uppgift blir nu att i stället studera hur Jacobis metod beter sig för de låga frekvenserna. Visa att vanliga Jacobis metod (motsvarar  $\omega = 1$ ) kommer att konvergera dubbelt så snabbt som dämpade Jacobis metod med  $\omega = 1/2$ .

5. I våra modellproblem har vi antagit att beräkningsnätet är ekvidistant. Kostnaden för att numeriskt lösa ett system av tidsberoende partiella differentialekvationer ökar med antalet nätpunkter. I riktiga

tillämpningsproblem finns ofta en del komplexa fenomen som kräver hög upplösning. Om man då använder ett ekvidistant beräkningsnät kommer man att använda samma höga upplösning även för de delar av lösningen som är "snälla" och *kan* beräknas tillräckligt noggrant med betydligt grövre nät. Eftersom minnesutrymmet är en starkt begränsande faktor för stora tillämpningsproblem vill man undvika att slösa med detta och att använda ekvidistant nät som diskuterats ovan är därför inte att rekommendera.

I stället försöker man konstruera s.k. *adaptiva* metoder. Man börjar då med ett relativt grovt nät. Efter varje tidssteg uppskattar man för varje nätpunkt felet i den beräknade lösningen (hur denna uppskattning utförs saknar betydelse för den frågeställning vi skall studera nedan) och de nätpunkter där noggrannheten befinns vara otillräcklig markeras. Därefter sker en anpassning, som kan göras på två sätt. Det ena kallas *h-adaptivitet* och innebär att nätet förfinas lokalt kring de markerade punkterna. Det andra, *p-adaptivitet*, innebär att man i områden kring markerade punkter byter till en numerisk metod av högre noggrannhetsordning (exakt hur detta kan åstadkommas är inte heller viktigt här).

Den fråga du skall besvara, med utförlig motivering, är: vilket av angreppssätten, h-adaptivitet eller p-adaptivitet, bör leda till kortast exekveringstid? För full poäng måste du genomföra en analys och får inte nöja dig med att hänvisa till kända resultat. I ditt resonemang behöver du emellertid inte ta hänsyn till de eventuella svårigheter som kan finnas med *implementeringen* av respektive metod.

6. Låt oss betrakta en allmän differensmetod, konsistent med det skalära modellproblemet  $u_t = au_x$ . Antag att information från tidsnivåerna  $n$  t.o.m.  $n - s$  används för beräkning av lösningen på tidsnivå  $n + 1$ . Antag vidare att  $l$  punkter till vänster och  $r$  punkter till höger om  $x_j$  utnyttjas för approximationen av rumsderivatan i punkt  $x_j$ . Differensmetoden kan då skrivas

$$\sum_{\sigma=-1}^s \sum_{\nu=-l}^r \alpha_{\sigma\nu} u_{j+\nu}^{n-\sigma} = 0.$$

Vid stabilitetsanalys med normal mode-metoden ger differensmetoden upphov till en karakteristisk ekvation. Visa att en av lösningarna till den ekvationen är  $z = 1$ ,  $\kappa = 1$ .