Uppsala Universitet
Institutionen för
TEKNISK DATABEHANDLING

Tentamen i Analys av Numeriska Metoder, 1998-10-16
Skrivtid: 08^{00} - 14^{00}
Hjälpmedel: Mathematical Handbook

Varje uppgift kan ge 5 poäng. För full poäng krävs fullständiga räkningar och motivering av resonemang.

1. Betrakta systemet

$$u_t + Au_x = 0 \qquad 0 \le x \le 1$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

a) Vilken typ av ekvation är detta? Motivera svaret med beräkningar.

b) Hur bör randvillkoren sättas för att systemet ej blir överspecificerat eller saknar lösning? Härled generella uttryck för randvillkoren.

c) Antag att systemet utökas med en lägre ordningens term,

$$u_t + Au_x + Bu = 0.$$

Beskriv hur detta påverkar lösningen och hur randvillkoren bör formuleras nu? Inga beräkningar krävs.

2. För att dämpa oscillationer i lösningen lägger man ofta till en dissipativ term, t.ex. för Leap-Frog applicerad på modellproblemet $u_t = u_x$ får vi

$$v_j^{n+1} = v_j^{n-1} + 2\Delta t D_0 v_j^n - \delta(\Delta x)^4 (D_+ D_-)^2 v_j^{n-1}.$$

a) Ska vi välja $\delta > 0$ eller $\delta < 0$? Motivera svaret!

b) Antag att vi väljer $\Delta t = 0.9\Delta x$. Bestäm ett tillräckligt villkor på δ för att schemat ska bli stabilt och dissipativt av ordning 4.

3. Antag att vi vill lösa värmeledningsekvationen $u_t = \lambda u_{xx}$.

a) Härled en 4:e ordningens approximation till derivatan $\partial^2 u/\partial x^2$.

b) Diskutera ur effektivitetssynpunkt hur man bör approximera tidsderivatan om man använder rumsapproximation ovan. Behandla både explicita och implicita metoder.

4. Betrakta det två-dimensionella hyperboliska problemet

$$u_t = u_x + u_y, \qquad 0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b.$$

med givna randvillkor och begynnelsevillkor. Problemet diskretiseras med Crank-Nicolson. Vi vill undersöka om randvillkoret

$$v_{0j}^n = 2v_{1j}^n - v_{2j}^n, \qquad j = 1, ..., n_y$$

är stabilt. Tillvägagångssättet är att man betraktar istället problemet på området $0 \le x < \infty$, periodiskt i y-riktningen,

$$\begin{aligned} v_{ij}^{n+1} &= v_{ij}^n + \frac{k}{2}(D_{0x} + D_{0y})(v_{ij}^{n+1} + v_{ij}^n) \\ v_{0j}^n &= 2v_{1j}^n - v_{2j}^n \\ v^n &\in l_2(0, \infty) \end{aligned}$$

och fouriertransformerar i y-riktningen. Därefter undersöker man stabiliteten på det transformerade problemet med hjälp av normal-mode analys. Fullfölj stabilitetsanalysen för att se om randvillkoret ovan är stabilt och isåfall under vilka villkor.

Ledning: Rötterna till den karakteristiska ekvationen är *kontinuerliga* funktioner av frekvensen ω_2 (från fouriertransformen i y-led).

5. Icke-linjära problem kräver ofta speciella egenskaper, förutom konsistens och stabilitet, hos det numeriska schemat för att dessa ska ge en bra lösning. Ge exempel på tre sådana egenskaper och förklara innebörden hos dem. Ge också exempel på ett schema (formeln utskriven) till den skalära konserveringslagen, $u_t + f(u)_x = 0$, som har dessa tre egenskaper.

6. I den sista inlämningsuppgiften skulle ni lösa modellproblemet

$$\begin{aligned} -\phi'' &= \pi^2 \sin \pi x, \qquad 0 < x < 1, \\ \phi(0) &= \phi(1) = 0 \end{aligned}$$

Ekvationen diskretiserades med D_+D_- vilket resulterade i det linjära ekvationssystemet $Au = f$, där

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (\, n \times n \,).$$

Ekvationssystemet skulle sedan lösas med dämpade Jacobi tills felet $\|u - v\|_2 < 10^{-6}$, där u är den exakta lösningen till det linjära ekvationssystemet och v är den approximativa lösningen som man får med dämpade Jacobi. Några grupper fick att Jacobi aldrig konvergerade till den givna noggrannheten trots att de hade implementerat metoden korrekt. Felet låg i att de jämförde v med den analytiska lösningen ϕ. Förklaringen är att vi har ett diskretiseringsfel i u som är större än 10^{-6} och v kan då inte konvergera mot ϕ med den noggrannheten. Uppgiften blir nu att beräkna storleken på diskretiseringsfelet (approximativt som funktion av h), dvs beräkna $\|\phi - u\|_2$. Till din hjälp har du att egenvektorerna till A ges av

$$v_\mu = \sqrt{2h}\begin{bmatrix} \sin(\mu\pi 1h) \\ \sin(\mu\pi 2h) \\ \vdots \\ \sin(\mu\pi nh) \end{bmatrix}$$

med motsvarande egenvärden $\lambda_\mu = \frac{4}{h^2}\sin^2(\frac{\mu\pi h}{2})$, $\mu = 1, \ldots, n$.