Integraler

Beräkningsvetenskap I/KF

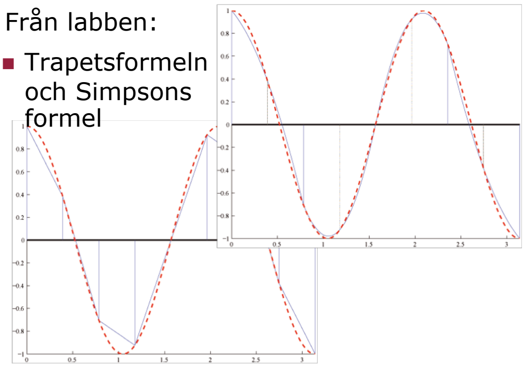
UPPSALA UNIVERSITET

Informationsteknologi

Integraler

Från labben:

- Trapetsformeln och Simpsons formel



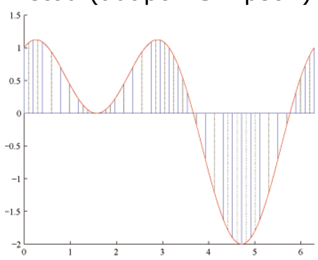
UPPSALA UNIVERSITET

Informationsteknologi

Integraler

Från labben:

- Adaptiv metod (adaptiv Simpson)



varierar steglängd automatiskt

UPPSALA UNIVERSITET

Informationsteknologi

Integraler

Från labben:

Lösning av integral i Matlab:

- när integranden är kontinuerlig funktion: använd **integral**. Gör indelning i intervall automatiskt (adaptiv metod)
- när integranden är diskreta mätvärden: använd **trapz**
  Här blir indelningen given av antalet datavärden

UPPSALA UNIVERSITET

Informationsteknologi

Integrering i Matlab

- Använd **integral**

$$\int_a^b \boxed{f(x)}\,dx$$

@func kallas för ett *funktionshandtag*

```
I = integral(@func, a, b)
```

- I matlabfunktionen **func** definieras integranden – måste tala om för Matlab vilken integral som ska lösas
- **integral** löser sedan integralen med numerisk metod (Simpson-liknande metod)

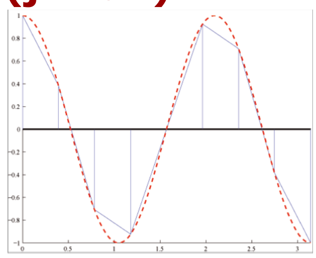
UPPSALA UNIVERSITET

Informationsteknologi

Exempel (jfr lab)

Arbetsgång:

Lös $\int_0^{\pi} \cos(3x)dx$



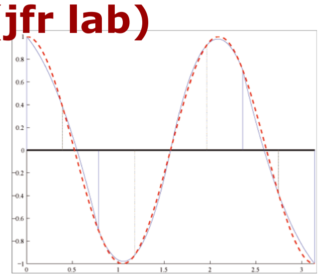
- Diskretisera, här 8 intervall
- Approximera med 1:a gradspolynom i varje intervall
- Beräkna arean i varje parallelltrapets – approximerar integral på delintervallet
- Kallas *Trapetsformeln*

Informationsteknologi

UPPSALA UNIVERSITET

Exempel (jfr lab)

Samma problem



- Diskretisera, här 8 intervall
- Approximera med 2:a gradspolynom på varje dubbelintervall (här blir det 4 dubbelintervall)
- Kallas *Simpsons formel*

Informationsteknologi

UPPSALA UNIVERSITET

Lösning av integraler

Arbetsgång generellt:

Givet Problemet $\int_a^b f(x)\,dx$.

- Diskretisera $a \le x \le b$, dvs dela in i punkter $x_0, x_1, \ldots, x_N$, där $x_0=a$ och $x_N=b$
- Ersätt integranden på varje delintervall med en enklare funktion, t ex polynom
- Beräkna den enklare funktionens integral exakt på varje delintervall. Kan göras med enkel formel
- Summera alla delintegraler

Räcker om $f(x)$ enbart känd i enstaka mätpunkter x_k, dvs enbart $f(x_k)$ känd.

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

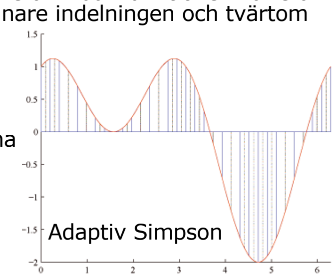
Informationsteknologi

UPPSALA UNIVERSITET

Adaptivitet (jfr lab)

- I praktiken används adaptiva metoder
- Dessa beräknar diskretiseringen på egen hand så att en viss noggrannhet erhålls
- Indelningen varierar – där funktionen varierar mycket krävs finare indelningen och tvärtom

Fråga: Hur kan metoden beräkna felet utan att känna till exakt lösning?



Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

UPPSALA UNIVERSITET

Trapets o Simpson

Formler på *ett* delintervall/dubbelintervall:

- Trapetsformeln

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx (x_{k+1}-x_k)\frac{f(x_{k+1})+f(x_k)}{2} = h_k\frac{f(x_{k+1})+f(x_k)}{2}$$

obs *bredden·höjden*

- Simpsons formel

$$\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x)dx \approx \frac{1}{6}(x_{k+2}-x_k)(f(x_k)+4f(x_{k+1})+f(x_{k+2})) =$$

$$= \frac{h_k}{3}(f(x_k)+4f(x_{k+1})+f(x_{k+2}))$$

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

UPPSALA UNIVERSITET

Trapets o Simpson

Allmänt kan man ansätta lösningen som

$$\int_{x_0}^{x_q} f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{q} a_k f(x_k)$$

kallas *Newton-Cotes formler*

Formlerna kan sedan användas för härledning av Trapets och Simpson:

Trapets: $q = 1$
Simpson: $q = 2$

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

UPPSALA UNIVERSITET

Trapets o Simpson

Om ekvidistant indelning, $h_k=h$, kan man få en enkel formel för hela intervallet

- Trapetsformeln

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{N-1} f(x_{k+1})+f(x_k) = \frac{h}{2}(f(x_0)+2f(x_1)+\cdots+2f(x_{N-1})+f(x_N))$$

- Simpsons formel

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\sum_{k=0,2,\ldots}^{N-1} f(x_k)+4f(x_{k+1})+f(x_{k+2}) =$$

$$\frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{N-2})+4f(x_{N-1})+f(x_N))$$

Obs. De här formlerna är mera praktiska vid hand-räkning. I verkliga fall används adaptiva metoder, dvs ej ekvidistant indelning.

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Trapets o Simpson

Om man har ekvidistant indelning kan metoderna enkelt implementeras med skalärprodukt…

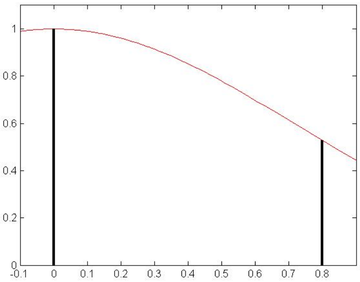
$$f = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \end{pmatrix}, \quad v_{tr} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

…och integralen beräknas

$$I_T = \frac{h}{2} v_{tr}^T f, \quad I_S = \frac{h}{3} v_s^T f$$

Noggrannhetsordning

$$\int_0^{0.8} e^{-x^2} dx$$



Värde enligt Matlabs `integral`: 0.65766985632840

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Noggrannhetsordning

Hur ändras diskretiseringsfelet vid olika val av *h*? Hur avtar det för minskande *h*?

Med trapetsformeln

h	$E_h = \lvert I - T(h) \rvert$	E_{2h}/E_h
0.4000	1.135e-002	
0.2000	2.819e-003	$E_{0.4}/E_{0.2}$ = 4.0280
0.1000	7.035e-004	$E_{0.2}/E_{0.1}$ = 4.0069
0.0500	1.758e-004	$E_{0.1}/E_{0.05}$ = 4.0017

T(h) = trapets med steglängd *h*

Slutsats: För trapetsregeln avtar diskretiseringsfelet med en faktor 4 när h halveras

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Noggrannhetsordning

Samma med Simpsons formel

h	$E_h = \lvert I - S(h) \rvert$	E_{2h}/E_h
0.4000	4.458e-004	
0.2000	2.635e-005	$E_{0.4}/E_{0.2}$= 16.9206
0.1000	1.621e-006	$E_{0.2}/E_{0.1}$= 16.2549
0.0500	1.009e-007	$E_{0.1}/E_{0.05}$=16.0638

S(h) = Simpson med steglängd *h*

Slutsats: För Simpson avtar diskretiseringsfelet med en faktor 16 när h halveras

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

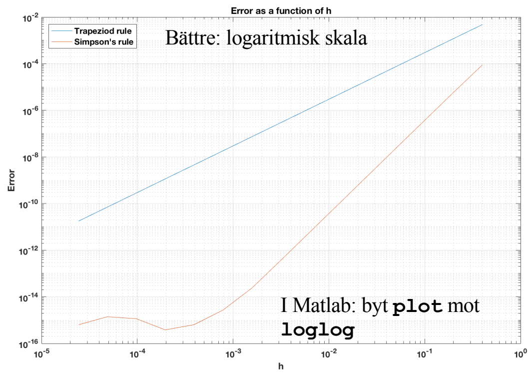
Noggrannhetsordning

Överfört till grafik

Svårt att se något, små tal ”försvinner i de stora…

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Noggrannhetsordning

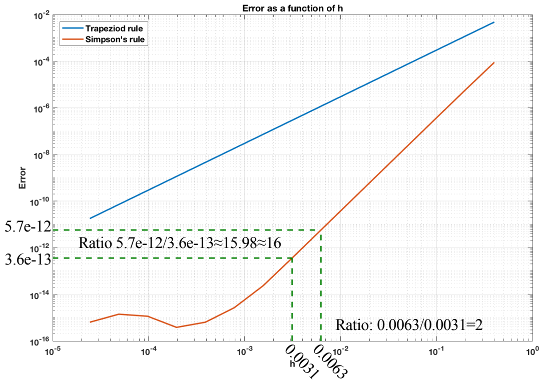


Bättre: logaritmisk skala

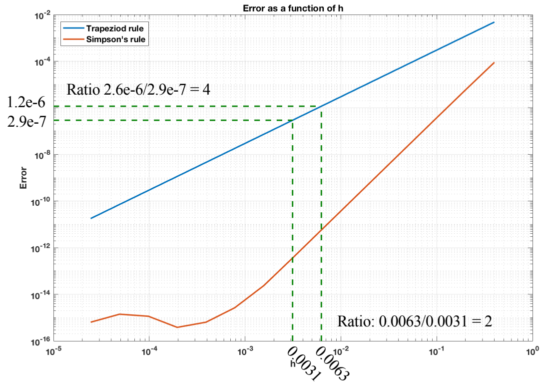
I Matlab: byt `plot` mot `loglog`

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Noggrannhetsordning



Noggrannhetsordning



Noggrannhetsordning

- Trapets
  En minskning av *h* med faktor 2 => minskning av felet med faktor 4
- Simpson
  En minskning av *h* med faktor 2 => minskning av felet med faktor 16

$4 = 2^{2}$ $\qquad$ $16 = 2^{4}$

Kallas metodens *noggrannhetsordning*

Nogrannhetsordning

- Noggrannhetsordningen visar hur snabbt diskretiseringsfelet avtar då h minskar
- Trapets
  - Noggrannhetsordning 2
  - Diskretiseringsfelet är av ordning $\mathcal{O}(h^2)$
- Simpson
  - Noggrannhetsordning 4
  - Diskretiseringsfelet är av ordning $\mathcal{O}(h^4)$
- Givet att man vill ha en viss noggrannhet kräver en metod av låg n.o. mindre h => fler beräkningar än metod med hög n.o.
- Å andra sidan kan varje beräkning vara mer omfattande för en metod med högre n.o.

Noggrannhetsordning

Diskretiseringsfelet kan även härledas analytiskt med Taylorutveckling

- Trapets
  Den ledande (dominerande) termen i felet på *ett delintervall* är

$$-\frac{h^3}{12}f''(x_k)+\mathcal{O}(h^5)$$

detta leder till att felet på *hela* [*a b*] blir

$$-\frac{h^2}{12}(b-a)f''(x_k)+\mathcal{O}(h^4)=ch^2 + \text{högre ordningens termer}$$

ch^2-termen är den ledande (största) termen i felet (då h litet) => felet är $\mathcal{O}(h^2)$

Noggrannhetsordning

- Simpson
  På samma sätt felet på *ett dubbelintervall*

$$-\frac{h^5}{90}f''''(x_k)+\mathcal{O}(h^6)$$

detta leder till att felet på *hela* [*a b*] blir

$$-\frac{h^4}{90}(b-a)f''''(x_k)+\mathcal{O}(h^5)=ch^4 + \text{högre ordningens termer}$$

ch^4-termen är den ledande termen i felet , dvs felet är $\mathcal{O}(h^4)$

Feluppskatting

- Kunskaperna om noggrannhetsordning kan användas för att uppskatta felet - utan att värdet på den exakta integralen är känd
- Om I är den exakta integralen, så blir absoluta felet för Trapets reps Simpson med steglängd h:

$$I - T(h) = ch^2 + \text{högre ordn termer}$$

$$I - S(h) = ch^4 + \text{högre ordn termer}$$

- Men man kan uppskatta de ledande termerna i diskretiseringsfelet (vanligen det fel som dominerar), dvs ch^2 respektive ch^4

Feluppskatting

- För trapets gäller att felet kan uppskattas med

$$ch^2 \approx \frac{T(h) - T(2h)}{3}$$

där *T(2h)* är beräkning av samma integral med dubbel steglängd

- Kallas *tredjedelsregeln*
- Är en uppskattning av ledande termen i diskretiseringsfelet, dvs $\mathcal{O}(h^2)$-termen

Feluppskattning

- För Simpson gäller att felet kan uppskattas med

$$ch^4 \approx \frac{S(h) - S(2h)}{15}$$

där *S(2h)* är beräkning av samma integral med dubbel steglängd

- Kallas *femtondelsdelsregeln*
- Uppskattning av den ledande termin i diskretiseringsfelet, dvs av $\mathcal{O}(h^4)$-termen

Feluppskattning

- Generellt gäller för en metod som betecknas Q

$$E_Q \approx \frac{Q(h) - Q(2h)}{2^p - 1}$$

där *p* är metodens noggrannhetsordning

- Tredjedelsregeln och femtondelsregeln är alltså specialfall av ovanstående
- Feluppskattningen används i adaptiva metoder för att uppskatta fel i beräkningen

Adaptiva metoder

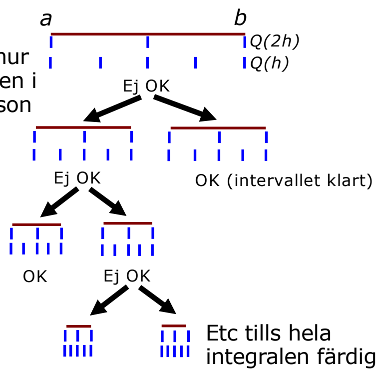
1. Beräkna integralvärde på intervall med steglängd *h => Q(h)* resp *2h => Q(2h)*
2. Uppskatta felet (med formel för feluppskattning)
3. Om felet < tolerans
   - acceptera *Q(h)*
   - beräkna nästa intervall, om inget ytterligare intervall finns, så färdig

   annars (dvs felet > tolerans)
   - Kasta *Q(h)*
   - Dela intervallet i två intervall
   - Beräkna integral, från punkt 1, för vart och ett av de två nya intervallen, *h* ges värdet *h*/2

Adaptiva metoder

Ex)

Schematiskt hur diskretiseringen i adaptiv Simpson kan se ut



Etc tills hela integralen färdig

Richardsonextrapolation

- Idé: $I-T(h)=E_T$ där E_T är diskretiseringsfelet => $I = T(h)+E_T$. Om $T(h)$ och E_T vore kända så kunde man beräkna exakta integralen I ?
- Fungerar inte riktigt eftersom vi enbart har en uppskattning av den ledande termen i felet E_T
- Däremot blir $T(h)+\frac{T(h)-T(2h)}{3}$ en förbättring

  Man kan visa att det blir detsamma som $S(h)$
- På motsvarande sätt kan man förbättra resultatet i Simpsons metod
- Detta kallas *Richardsonextrapolation*

Avrundningsfel

- Förutom diskretiseringsfel har vi avrundningsfel i funktionsberäkningarna, s k *funktionsfel*
  Hos trapetsmetoden

  $$T(h)=\frac{h}{2}(f(x_0)+2f(x_1)+\cdots+2f(x_{N-1})+f(x_N))$$

  pga avrundningsfel beräknas inte $f(x)$ utan $\tilde{f}(x)$ dvs

  $$\tilde{T}(h)=\frac{h}{2}(\tilde{f}(x_0)+2\tilde{f}(x_1)+\cdots+2\tilde{f}(x_{N-1})+\tilde{f}(x_N))$$

  Om $\left|\tilde{f}(x)-f(x)\right|\le\varepsilon$

  så kan man få fram att $\left|\tilde{T}(h)-T(h)\right|\le(b-a)\cdot\varepsilon$

Avrundningsfel

- Funktionsfelet, trapets $\left|\tilde{T}(h)-T(h)\right|\le(b-a)\cdot\varepsilon$
- Motsvarande för Simpson
- Om det bara är avrundning så är $\varepsilon=\varepsilon_M$
- Men ε kan vara större om $f(x)$-värdena kommer från mätdata med större osäkerhet
- Om enbart avrundningar så är ε litet och diskretiseringsfelet kommer att dominera

Noggrannhet

- Felkällor:
  - Kontinuerligt ersätts av diskret => diskretiseringsfel
  - Avrundningsfel i beräkning av $f(x_k)$ => funktionsfelet
- Exakt integral: $I=\int_a^b f(x)\,dx$

  Numerisk metod, Q: $I\approx Q(h)$
- Då blir det totala absoluta felet

  $I-Q(h)=$ diskretiseringsfel + funktionsfel