# Block 2: Linjära system

**Del 2**

---

Informationsteknologi

## Löpsedel

- Noggrannhet och störningskänslighet: residual och konditionstal
- Normer
- Varför `A\b` är effektivare än `inv(A)*b`, dvs Gausselimination effektivare än $x = A^{-1} b$ ?
- Kursboken:
  Kap 11.1, 11.2, 11.3



---

Informationsteknologi

## Noggrannhet

Hur korrekt blir beräkningen $Ax=b$?

- Exakt lösning: $x$ (inte känd)
- Beräknad lösning: $\hat{x}$
- Hur noggrann är den beräknade lösningen?
- ”Naturligt” test:
  Sätt in $\hat{x}$ i VL och jämför med HL:

  $b - A\hat{x}$ kallas *residualen*

  borde bli nästan noll. Eller?



---

Informationsteknologi

## Residualen, ett test

$$A = \begin{pmatrix} 1.8020 & 0.0748 & -1.6910 \\ 1.7672 & 0.0734 & -1.6584 \\ 0.9327 & 0.0387 & -0.8753 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0.1857 \\ 0.1821 \\ 0.0961 \end{pmatrix}$$

$A$ och $b$ konstruerade så att exakt lösning är

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
>> x_hat = A\b
 x_hat =
        1.2102
        3.0000
        1.3125
```

Uppenbart stort fel i lösningen!



---

Informationsteknologi

## Residualen, ett test

Residualen liten

```
>> res = b-A*x_hat
 res =
 1.0e-15 *
    0.2220
    0.2220
         0
```

Men felet stort

```
>> fel = abs(x-x_hat)
  fel =
 1.0e+02*
    0.2102
    2.0000
    0.3125
```

Stort konditionstal

```
>> cond(A)
 ans = 6.6543e+16
```



---

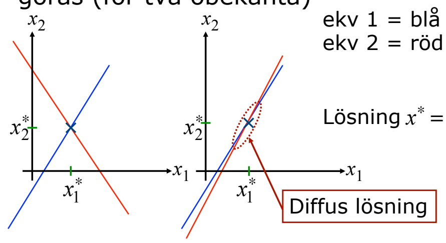
Informationsteknologi

## Konditionstal och residual

- Slutsats:
  Residualen är inte ett tillförlitligt mått på noggrannheten!
- Varför?
  Problemet i exemplet är störningskänsligt, *illakonditionerat*
- Måste ha ett annat sätt att uppskatta felet

## Konditionstal och residual

- Väl- resp illakonditionerat kan åskådlig-göras (för två obekanta)




ekv 1 = blå linje
ekv 2 = röd linje

Lösning $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}$

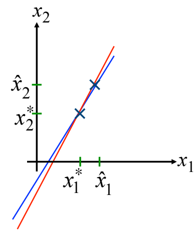
- Illakonditionerat har ”diffus lösning”. Även lite felaktiga lösningar medför att residualen kan vara liten



## Konditionstal och residual

Varför är residualen ej tillförlitlig?

Vid diffus skärning:
Även en felaktig lösning $\hat{x}$ som ligger ganska långt från $x^*$ är ändå nästan på båda linjerna, dvs $A\hat{x} \approx b$
- $\| x^* - \hat{x} \|$ är stor
- residualen $b\text{-}Ax$ liten




- Residual ej tillförlitlig då illa-konditionerat problem



## Norm

Först…

- För att mäta fel behöver vi ett sätt att mäta storlek på vektorer och matriser, en motsvarighet till absolutbelopp för skalärer
- Detta görs med normer, betecknas $\| \ \|$
- Normer både för vektorer och matriser, *vektornorm* resp *matrisnorm*



## Norm

- Vektornorm
  Några vanliga normer för $x = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T$

  2-norm, euklidisk norm:
  $$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$
  1-norm, minnorm:
  $$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$
  $\infty$-norm, maxnorm:
  $$\|x\|_\infty = \max_i \{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$



## Norm

- Olika normer?
  Vilken passar bäst?

1-norm:

2-norm:




## Norm

- Matrisnorm

  Definition: $\|A\| = \max_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$

  Obs! baseras på vektornormer ($Ax$ och $x$ är vektorer)
- Definitionen används inte för att hitta normen för en viss matris, utan för härledningar
- Ur definitionen kan man härleda lättare formler för 1-norm, $\infty$-norm och 2-norm

## Norm

- Ur definitionen kan man härleda

$$\|A\|_1 = \max_j \left\{ \sum_i |a_{ij}| \right\}$$ ,1-norm, minnorm

$$\|A\|_\infty = \max_i \left\{ \sum_j |a_{ij}| \right\}$$ , $\infty$-norm, maxnorm

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max\left\{\lambda(A^T A)\right\}}$$ , 2-norm, euklidisk norm

- Vanligen används 1- eller $\infty$-norm eftersom 2-normen är mycket ”dyr” att beräkna



## Norm

- I Matlab
  - norm(x) 2-normen av vektor *x*
  - norm(A) 2-normen av matrisen *A*
  - norm(A,1) 1-normen
  - norm(A,inf) $\infty$-normen

```
>> A=
     1    -2
     6     4
>> norm(A,1)
ans =
     7
```

```
>> norm(A,inf)
ans =
      10
>> norm(A)
ans =
      7.2170
```

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

## Konditionstal

- Man kan härleda följande uppskattning av felet i $x$

$$\frac{\|x-\hat{x}\|}{\|x\|} \le cond(A)\frac{\|b-\hat{b}\|}{\|b\|}$$

där $cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ kallas för $A$:s konditionstal

- Tolkning:
  Rel fel i $x$ ≤kond tal∗rel fel i högerled $b$
- Fel i indata, $b$ kan alltså förstärkas med en faktor *cond(A)* i beräkningsprocessen

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

## Konditionstal

- Beräkning av konditionstal kan baseras på de olika normerna
- Vårt gamla exempel

$$A = \begin{pmatrix} 1.8020 & 0.0748 & -1.6910 \\ 1.7672 & 0.0734 & -1.6584 \\ 0.9327 & 0.0387 & -0.8753 \end{pmatrix}$$

$cond_2(A) = 6.6 \cdot 10^{16}$
$cond_1(A) = 2.7 \cdot 10^{16}$
$cond_\infty(A) = 2.1 \cdot 10^{16}$

Fel i högerledet, t ex fel i mätdata, kan alltså förstärkas med en faktor $10^{16}$ när man löser systemet

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

## Konditionstal

- Stort konditionstal/illakonditionerat problem tyder på att matrisen är ”nästan” singulär
- I matematiken är en matris antingen singulär eller icke-singulär - här kan en matris vara ”nästan” singulär
- Stort konditionstal
  - beror på det underliggande problemets natur, t ex att den fysikaliska verklighet är störningskänslig
  - beror inte på/påverkas inte av val av algoritm

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

## Konditionstal

- Konditionstalet fungerar som en varning –felet *kan* vara stort


- Gäller att

$$cond(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \;\ge\; \|A^{-1}A\| = \|I\| = 1$$

- Konditionstalet är alltså i bästa fall 1 – medför ingen förstärkning alls av felet

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

## Uppskattning av konditionstal

- Man brukar generellt akta sig för att beräkna inversen pga den "dyra" beräkningen
- Hur beräknas $cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ ? Svar: Vanligen används uppskattningar. I Matlabs backslash används detta alltid.

Uppskattning säger att $cond(A) \approx 10^{20}$

```
>> x = A\b;
Warning: Matrix is close to singular
         or badly scaled.
         Results may be inaccurate.
         RCOND = 8.113755e-020.
```

Informationsteknologi



## Använda inversen

- Ett alternativ till att lösa *Ax=b* med LU-faktorisering skulle kunna vara $x = A^{-1}b$

```
>> A = rand(10000,10000);
>> b = rand(10000,1);
>> tic; x = A\b; toc
Elapsed time is 85.4400 seconds.
>> tic; x = inv(A)*b; toc
Elapsed time is 251.89 seconds.
```

- Inversberäkning tar nästan tre gånger så lång tid. Varför?

Informationsteknologi



## Använda inversen

- Beräkna inversen görs enligt $AA^{-1}=I$, vilket motsvarar att lösa ekvationssystem med *n* st högerled

$$Aug = \left(\begin{array}{c|c} A & \underbrace{\begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix}}_{n \text{ stycken kolonner}} \end{array}\right)$$

- Kan lösas med LU-faktorisering en gång, sedan *n* st framåt- och bakåtsubstitutioner
  - LU-faktorisering: $\frac{2}{3}n^3$
  - Framåt och bakåt subst: $n(n^2+n^2) = 2n^3$

Informationsteknologi



## Använda inversen

- Antal operationer för $x = A^{-1}b$:

$$\frac{2}{3}n^3 + 2n^3 \approx \frac{8}{3}n^3$$

- Antal operationer för *x=A\b*, dvs gausselimination (med LU-faktorisering):

$$\frac{2}{3}n^3 + 2n^2 \approx \frac{2}{3}n^3 \quad \text{för stora } n$$

- Slutsats: Nästan 4 ggr mer beräkningar
- Det går att utnyttja att högerleden innehåller delvis samma element (nollor), så det blir inte fullt så illa. Men det tar i praktiken nästan tre gånger längre tid

Informationsteknologi