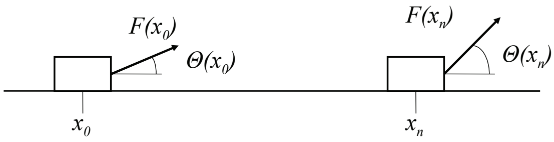
Fallstudie: numerisk integration

Baserad på läroboken, Case Study 17.9

UPPSALA UNIVERSITET

Informationsteknologi

Att beräkna arbete



Problem: Beräkna arbetet för att förflytta blocket från x_0 till x_n givet kraften F(x) och vinkeln θ(x)

UPPSALA UNIVERSITET

Informationsteknologi

Matematisk modell

$$W = \int_{x_0}^{x_n} F(x)\cos(\theta(x))dx$$

Beteckningar

W: arbetet (Joule)

x: position i rummet (meter)

F(x): kraftens storlek i punkten x (Newton)

Θ(x): vinkeln i punkten x (radianer)

UPPSALA UNIVERSITET

Informationsteknologi

Angreppssätt

Olika angreppssätt för olika fall:

- F(x) och θ(x) givna som formler och ”enkla”: analytisk integration
- F(x) och θ(x) givna som formler men ”svåra”: numerisk integration
- F(x) och θ(x) givna som mätvärden: numerisk integration

Angreppssätt (forts.)

I föreläsningarna har vi lärt oss:

Steg i numerisk lösning av problemet:

- Diskretisering:
  - a. Diskreta punkter i integrationsintervallet
  - b. Approximation av integranden med styckvis polynom
  - c. Bestämning av integralen av det styckvisa polynomet
- Den formel som blir resultatet av a,b,c tillämpas på våra aktuella data; det beräknade värdet blir vårt approximativa värde på W.

Angreppssätt (forts.)

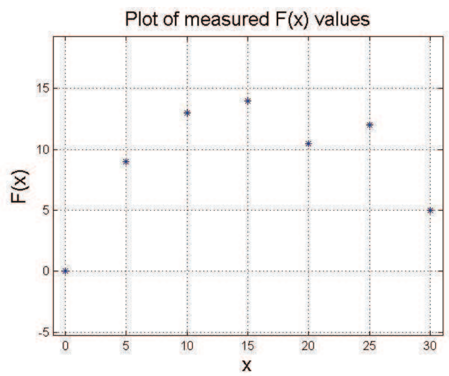
Viktigt att notera:

- När steg 1 a,b,c utförs på en allmän integral, så leder det till en generell formel för numerisk integrering. Så har exempelvis trapetsformeln och Simpsons formel härletts. Normalt går man alltså direkt till steg 2
- Diskretiseringsfelet kallas här trunkeringsfel och det minskar med minskande steglängd (ökande antal punkter).

I vårt fall: F(x) och θ(x) är givna i form av mätvärden

x	F(x)	θ(x)
0	0.0	0.50
5	9.0	1.40
10	13.0	0.75
15	14.0	0.90
20	10.5	1.30
25	12.0	1.48
30	5.0	1.50

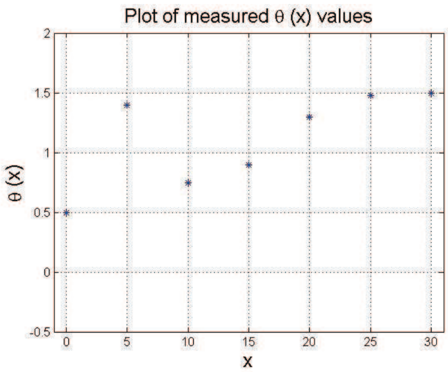
Våra indata: F(x)



UPPSALA UNIVERSITET

Informationsteknologi

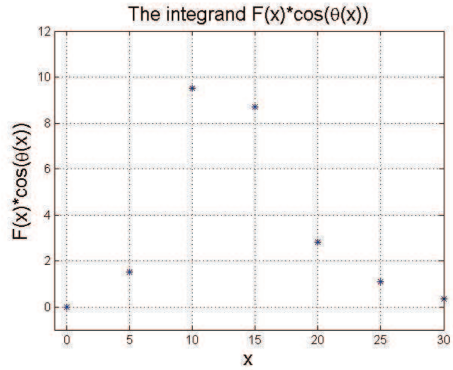
Våra indata: θ(x)



UPPSALA UNIVERSITET

Informationsteknologi

Våra indata: integranden F(x)*cos(θ(x))



Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

UPPSALA UNIVERSITET

Informationsteknologi

Lösning med trapetsformeln

Låt g(x) beteckna vår integrand:
g(x) = F(x)cos(θ(x))

$$W \approx T(h) = \frac{h}{2}\left[g(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} g(x_i) + g(x_n) \right]$$

Skriv ett program som löser vårt problem med denna metod. Använd Matlabs inbyggda funktion trapz. Använd samtliga tillgängliga punkter och uppskatta felet med tredjedelsregeln.

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

UPPSALA UNIVERSITET

Informationsteknologi

Algoritmskiss

Lagra våra x-värden i en variabel x

Lagra våra F(x)-värden i en variabel F

Lagra våra θ(x)-värden i en variabel theta

Beräkna g(x) för våra givna x-värden och lagra resultatet i en variabel g

Beräkna T(h), lagra i variabeln I1

Beräkna T(2h), lagra i variabeln I2

Beräkna uppskattat fel (T(h)-T(2h))/3 och lagra värdet i variabeln fel

Skriv en resultatutskrift (med I1 och fel)

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Implementering i Matlab

```
x = [0 5 10 15 20 25 30];
F = [0.0 9.0 13.0 14.0 10.5 12.0 5.0];
theta = [0.50 1.40 0.75 0.90 1.30 1.48
   1.50];
g = F.*cos(theta);
I1 = trapz(x,g);
I2 = trapz(x(1:2:7),g(1:2:7));
fel = (I1-I2)/3;
disp(['Approximativt värde på W: '
   num2str(I1)])
disp(['Uppskattat diskretiseringsfel: '
   num2str(fel)])
```

Informationsteknologi

UPPSALA UNIVERSITET

Utskrift när programmet körs

Approximativt värde på W: 119.0892

Uppskattat diskretiseringsfel: -1.9621

Informationsteknologi

UPPSALA UNIVERSITET

Hur noggrant kan vi bedöma att det beräknade W-värdet är?

F(x)-värdena (och därmed g(x)-värdena) är givna med en korrekt decimal

Funktionsfelet i beräkningen av W ovan kan då till absolutbeloppet vara så stort som:

$$(30-0)\cdot 0.5\cdot 10^{-1} = 1.5$$

Totalt kan felet till absolutbeloppet uppskattas vara högst ca 1.5 + |-1.9621| ≈ 3.5

Slutsats: W ≈119±3.5

OBS! Detta är den uppskattning av felet som våra data medger. Det verkliga felet kan vara större.

Informationsteknologi

UPPSALA UNIVERSITET

Generellare program

- Fallet då experimentdata finns lagrade i .MAT-fil

```
disp('Data förutsätts vara lagrade i .MAT-fil')
fil = input('Ange filnamnet (utan .MAT): ','s');
load(fil)
np = length(x); % Antal punkter
g = F.*cos(theta);
I1 = trapz(x,g);
I2 = trapz(x(1:2:np),g(1:2:np));
fel = (I1-I2)/3;
```

etcetera

Informationsteknologi

UPPSALA UNIVERSITET

Informationsteknologi

UPPSALA UNIVERSITET

Generellare program

- Fallet när en formel för g(x) är given som en Matlab-funktion **g(x)**

```
v = input('Ge integrationsintervallet [a b]: ')
n = input('Ge önskat antal delintervall: ')
x = linspace(v(1),v(2),n+1)
gvalues = g(x);
I1 = trapz(x,gvalues);
I2 = trapz(x(1:2:n+1),gvalues(1:2:n+1));
fel = (I1-I2)/3;
```


Informationsteknologi

UPPSALA UNIVERSITET

Att fundera på

- Vad skulle behövas för att programmet automatiskt skulle kunna beräkna integralen med en viss av användaren önskad noggrannhet? (I vilka fall är det realistiskt? Hur skulle en algoritm kunna se ut?)