

1 Linjära system

1.1 Representation i datorn

Ekvationssystem med matris/vektor-notation:

$$Ax = b$$

A : $n \times n$ -matris

x och b : kolonnvektorer

I datorn representeras ekvationssystemet av A och b .

Matlabs ”backslash”-operator (\) löser systemet: $x = A\b$

Gausselimination består av två delar:

1. Triangulering (”Forward elimination”): Systemet $Ax = b$ överförs till formen $Ux = d$ där U är en övertriangulär matris.
2. Bakåtsubstitution: Systemet $Ux = d$ lösas och lösningen lagras i vektorn x .

1.2 Gausselimination i Matlab

```
function x = GaussElim(A,b)
n = size(A,1);
for k = 1:n-1           % n-1 iterationer
    pivot = A(k,k);
    for j = k+1:n        % n-k iterationer
        factor = A(j,k)/pivot;          % 1 operation
        A(j,k:n) = A(j,k:n) - factor*A(k,k:n); % 2(n-k+1) operationer
        b(j) = b(j) - factor*b(k);          % 2 operationer
    end
end
% Totalt 2/3 * n^3 + O(n^2)

x = zeros(n,1);
for k = n:-1:1           % n iterationer
    x(k) = (b(k) - A(k,k+1:n)*x(k+1:n)) / A(k,k); % 2(n-k)+2 operationer
end
% Totalt ca n^2 operationer

% Example where pivoting is needed
% A=[1 0 1;2 1e-20 200;1 2 1],b=[1;1;1];GaussElim(A,b),A\b
% Change second and third rows
% A=[1 0 1;1 2 1;2 1e-20 200],b=[1;1;1];GaussElim(A,b),A\b
```

1.3 Exekveringstid

Hur lång tid kommer det ta att utföra en algoritm?

Hur ska man mäta?

- *Tid*: Datorberoende, implementationsdetaljer, lämpligt för att utvärdera program på specifik plattform.
- *Antal flyttalsoperationer*: Datorberoende, lämpligt för att utvärdera algoritmer.

En viktig aspekt: algoritmens *komplexitet*.

Svar på frågan: Hur mycket växer kostnaden (tid/antal operationer) när systemstorleken ökar?

Antal flyttalsoperationer:

Triangulering: $(2/3)n^3 + \mathcal{O}(n^2)$

Bakåtsubstitution: $n^2 + \mathcal{O}(n)$

Antag $t_f = 10^{-9}$ s/flyttalsoperation (s/flop) på en viss dator.

n	Triangulering	Bakåtsubstitution
10^3	$(2/3)n^3 t_f$	$n^2 t_f$
10^6	0.67 s	10^{-3} s
	0.67×10^9 s ≈ 21 år	1000 s ≈ 17 min

Hur stort system kan lösas på en timme om datorn klarar 1 Gflop/s ?

(Gflop = 1 miljard flyttalsoperationer)

$$(2/3)n^3 \cdot 10^{-9} \text{ s} = 1 \text{ tim} = 3600 \text{ s} \Rightarrow n \approx 18000$$

Hur stort system kan lösas på en minut ?

$$(2/3)n^3 \cdot 10^{-9} \text{ s} = 60 \text{ s} \Rightarrow n \approx 4500$$

1.4 LU-faktorisering

Vinst med LU-faktorisering:

Problem: lös m ekvationssystem där högerleden beror på tidigare lösningar.

- *Ineffektivt*: Lös varje system med $x = A \setminus b$. (Gausseliminering av A för varje nytt högerled.)
 $\frac{2}{3}mn^3 + \mathcal{O}(n^2)$ aritmetiska operationer
- *Effektivt*: LU-faktorisera A ($[L, U, P] = \text{lu}(A)$ i Matlab) och lös varje system med

```
d = L \ (P * b);
x = U \ d;
```

$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(mn^2)$ aritmetiska operationer