

1 Noggrannhet hos sammansatta trapetsregeln

Vi vill beräkna

$$\int_a^b f(x)dx$$

Vi tittar först på ett delintervall $[s, t]$.

Steg 1: Taylor-utveckling runt $m = (t + s)/2$

$$f(m + h) = f(m) + hf'(m) + \frac{h^2}{2}f''(m) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(m) + \dots$$

$$f(x) = f(m + (x - m)) = f(m) + (x - m)f'(m) + \frac{(x - m)^2}{2}f''(m) + \frac{(x - m)^3}{3!}f^{(3)}(m) + \dots$$

Steg 2: Integrera på delintervallet $[s, t]$

$$\begin{aligned} (*) \quad \int_s^t f(x)dx &= \left[xf(m) + \frac{(x - m)^2}{2}f'(m) + \frac{(x - m)^3}{3!}f''(m) + \frac{(x - m)^4}{4!}f^{(3)}(m) + \dots \right]_s^t \\ &= f(m)(t - s) + f'(m) \underbrace{\left(\frac{(t - m)^2}{2} - \frac{(s - m)^2}{2} \right)}_{=0} + f''(m) \underbrace{\left(\frac{(t - m)^3}{3!} - \frac{(s - m)^3}{3!} \right)}_{=(t-s)^3/(2^2 \cdot 3!)} + \dots \\ &= f(m)(t - s) + f''(m) \frac{(t - s)^3}{2^2 \cdot 3!} + f^{(4)}(m) \frac{(t - s)^5}{2^4 \cdot 5!} + \dots \end{aligned}$$

Steg 3: Uttryck $f(m)$ i termer av Taylor-utveckling för $f(s)$ och $f(t)$

Från Steg 1

$$\begin{aligned} f(s) + f(t) &= 2f(m) + \underbrace{(s + t - 2m)}_{=0} f'(m) + \underbrace{((s - m)^2 + (t - m)^2)}_{=(t-s)^2/2} \frac{f''(m)}{2} + \dots \Rightarrow \\ (**)\ f(m) &= \frac{1}{2} \left(f(s) + f(t) - \frac{(t - s)^2}{4} f''(m) + \dots \right) \end{aligned}$$

Steg 4: Uttryck för $f(m)$ $(**)$ insättes i $(*)$

$$\int_s^t f(x)dx = \frac{1}{2}(f(s) + f(t))(t - s) - \frac{1}{12}(t - s)^3 f''(m) + \mathcal{O}((t - s)^5)$$

Steg 5: Summera över alla delintervall

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \frac{h}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_i)) + Ch^2 + \mathcal{O}(h^4) = T(h) + Ch^2 + \mathcal{O}(h^4)$$