Block 4: Integraler

Löpsedel: Integraler

- Trapetsformeln
- Simpsons formel
- Grundidé, numerisk kvadratur
- Noggrannhet, teoretiskt
- Praktisk feluppskattning med richardsonextrapolation
- Adaptiv kvadratur
- Noggrannhet, inverkan av mätfel/avrundningsfel

Informationsteknologi

Lärobok

- Kap 17.1-17.3, 17.4.1-2, 17.6, 17.9, 18.2.1, 18.4

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

Integrering i Matlab

- Använd **quad** eller **quadl**

$$\int_a^b \boxed{f(x)}dx$$

@func kallas för ett *funktionshandtag*

```
I = quad(@func, a, b)
```

- I matlabfunktionen **func** finns integranden definierad – måste tala om för Matlab vilken integral som ska lösas
- **quad**/**quadl** löser sedan integralen med numerisk metod
- Num integrering kallas även kvadratur

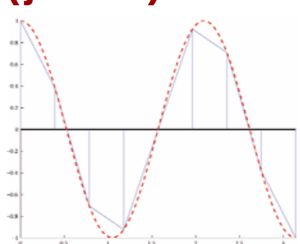
Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

Exempel (jfr lab)

Arbetsgång:

Lös $\int_0^{\pi} \cos(3x)dx$



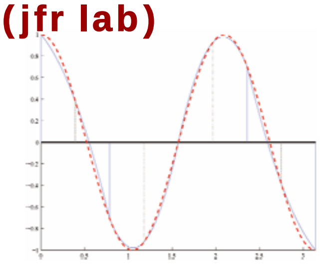
- Diskretisera, här 8 intervall
- Styckvis linear interpolation (1:a gradspolynom)
- Beräkna arean i varje parallelltrapets – approximerar integral på delintervallet
- Kallas *Trapetsformeln*

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

Exempel (jfr lab)

Samma problem



- Diskretisera, här 4 dubbelintervall
- Styckvis kvadratisk interpolation (2:a grads-polynom)
- Kallas *Simpsons formel*

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Lösning av integraler

Problemet $\int_a^b f(x)dx$. Räcker om *f(x)* endast känd i enstaka mätpunkter x_k, dvs endast $f(x_k)$ känd

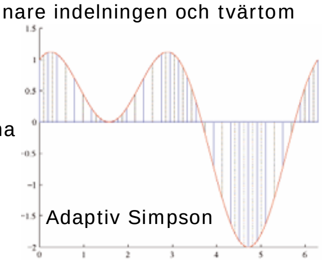
Gången blir

- Diskretisera $a \le x \le b$, dela in i punkter $x_0, x_1, \ldots, x_N$ där $x_0 = a$ och $x_N = b$
- Ersätt integranden på varje delintervall med en enklare funktion, t ex polynom
- Beräkna den enklare funktionens integral exakt på varje delintervall (kan göras med enkel formel)
- Summera alla delintegraler

Adaptivitet (jfr lab)

- I praktiken används adaptiva metoder
- Dessa beräknar diskretiseringen på egen hand så att en viss noggrannhet erhålls
- Indelningen varierar – där funktionen varierar mycket krävs finare indelningen och tvärtom

Fråga: Hur kan metoden beräkna felet utan att känna till exakt lösning?



Trapets o Simpson

Formler på *ett* delintervall/dubbelintervall:

- Trapetsformeln

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx (x_{k+1} - x_k)\frac{f(x_{k+1}) + f(x_k)}{2} = h_k \frac{f(x_{k+1}) + f(x_k)}{2}$$

  obs bredden*höjden
- Simpsons formel

$$\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x)dx \approx \frac{1}{6}(x_{k+2} - x_k)(f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2})) =$$
$$= \frac{h_k}{3}(f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2}))$$

Trapets o Simpson

Allmänt kan man ansätta

$$\int_{x_0}^{x_q} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{q} a_k f(x_k)$$

kallas *Newton-Cotes formler*

Formlerna kan användas för härledning av Trapets och Simpson

Trapets o Simpson

Om ekvidistant indelning, $h_k = h$, kan samtliga delintervall summeras

- Trapetsformeln

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{N-1} f(x_{k+1}) + f(x_k) =$$
$$= \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N))$$

- Simpsons formel

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\sum_{k=0,2,\ldots}^{N-1} f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2}) =$$
$$\frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{N-2}) + 4f(x_{N-1}) + f(x_N))$$

Trapets o Simpson

Kan enkelt implementeras med skalärprodukt...

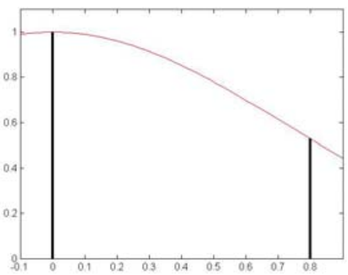
$$f = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \end{pmatrix}, \quad v_{tr} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

...och integralen beräknas

$$I_T = \frac{h}{2} v_{tr}^T f, \quad I_S = \frac{h}{3} v_s^T f$$

Noggrannhetsordning

$$\int_0^{0.8} e^{-x^2}\,dx$$



Värde enligt Matlabs **quad**: 0.65766985632840

Noggrannhetsordning

Med trapetsformeln

h	I-T(h)	(I-T(2h))/(I-T(h))
0.4000	1.135e-002	
0.2000	2.819e-003	4.0280
0.1000	7.035e-004	4.0069
0.0500	1.758e-004	4.0017

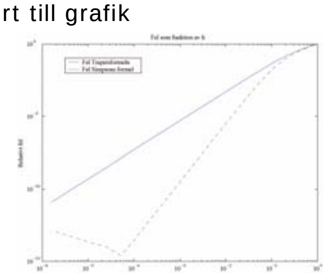
Diskretiseringsfel

Med Simpsons formel

h	I-S(h)	(I-S(2h))/(I-S(h))
0.4000	-4.458e-004	
0.2000	-2.635e-005	16.9206
0.1000	-1.621e-006	16.2549
0.0500	-1.009e-007	16.0638

Noggrannhetsordning

- Överfört till grafik



Noggrannhetsordning

- Trapets
  En minskning av *h* med faktor 2 =>
  minskning av felet med faktor 4
- Simpson
  En minskning av *h* med faktor 2 =>
  minskning av felet med faktor 16

4 = 2^2 16 = 2^4

Kallas metodens *noggrannhetsordning*

Diskretiseringsfel

- Trapets
  - Noggrannhetsordning 2
  - Diskretiseringsfelet är av ordning $O(h^2)$
- Simpson
  - Noggrannhetsordning 4
  - Diskretiseringsfelet är av ordning $O(h^4)$
- Givet att man vill ha en viss noggrannhet kräver en metod av låg n.o. mindre *h* => fler beräkningar än metod med hög n.o.

Diskretiseringsfel

Felet kan även härledas analytiskt

- Trapets
  Den ledande (dominerande) termen i felet på ett delintervall är
  $$-\frac{h^3}{12} f''(x_k) + O(h^4)$$
  detta leder till att totala felet på hela [*a b*] blir $O(h^2)$
- Simpson
  På samma sätt felet på ett dubbelintervall
  $$-\frac{h^5}{90} f''''(x_k) + O(h^6)$$
  leder till att felet på [*a b*] blir $O(h^4)$

Feluppskatting

- Kunskaperna om nogrannhetsordning kan användas för att uppskatta felet - detta utan att veta den exakta integralen
- För trapets gäller att felet E_T i integral-beräkningen *T(h)*
  $$E_T \approx \frac{T(h) - T(2h)}{3} \quad \text{(Jfr laboration)}$$
  där *T(2h)* är beräkning av samma integral med dubbel steglängd
- Kallas *tredjedelsregeln*
- Är en uppskattning av ledande termen i felet, dvs $O(h^2)$-termen

Feluppskattning

- För Simpson gäller att felet E_S i integral-beräkningen *S(h)*
  $$E_S \approx \frac{S(h) - S(2h)}{15} \quad \text{Jfr laboration}$$
  där *S(2h)* är beräkning av samma integral med dubbel steglängd
- Kallas *femtondelsdelsregeln*
- Uppskattning av den ledande termin i diskretiseringsfelet, dvs av $O(h^4)$-termen

Feluppskattning

- Generellt gäller
  $$E \approx \frac{Q(h) - Q(2h)}{2^p - 1}$$
  där *p* är metodens noggrannhetsordning
- Detta kallas *Richardsonextrapolation*
- Tredjedelsregeln och femtedelsregeln är alltså specialfall av Richardson-extrapolation
- Richardsonextrapolation kan användas i adaptiva metoder

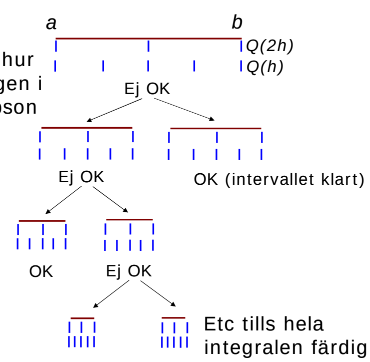
Adaptiva metoder

1. Beräkna integralvärde på intervall med steglängd *h* => *Q(h)* resp *2h* => *Q(2h)*
2. Uppskatta felet (Richardsonextrapolation)
3. Om felet < tolerans
   - acceptera *Q(h)*
   - beräkna nästa intervall, om inget ytterligare intervall finns, så färdig

   annars (dvs felet > tolerans)
   - Kasta *Q(h)*
   - Dela intervallet i två intervall
   - Beräkna integral, från punkt 1, för vart och ett av de två nya intervallen, *h* ges värdet *h*/2

Adaptiva metoder

Ex)
Schematiskt hur diskretiseringen i adaptiv Simpson kan se ut



Etc tills hela integralen färdig

Funktionsfelet

- Förutom diskretiseringsfel tillkommer *funktionsfel*
  Hos trapetsmetoden
  $$T(h)=\frac{h}{2}(f(x_0)+2f(x_1)+\cdots+2f(x_{N-1})+f(x_N))$$
  pga avrundningsfel beräknas ej $f(x)$ utan $\tilde{f}(x)$
  dvs
  $$\tilde{T}(h)=h(\frac{1}{2}\tilde{f}(x_0)+\tilde{f}(x_1)+\cdots+\tilde{f}(x_{N-1})+\frac{1}{2}\tilde{f}(x_N))$$
  Om $\left|\tilde{f}(x)-f(x)\right|\le\varepsilon$
  så kan man få fram att
  $$\left|\tilde{T}(h)-T(h)\right|\le(b-a)\cdot\varepsilon$$

Informationsteknologi

Funktionsfelet

- Funktionsfelet, trapets $\left|\tilde{T}(h)-T(h)\right|\le(b-a)\cdot\varepsilon$
- Motsvarande för Simpson
- Kan detta bli stort?
  Det beror på storleken hos ε.
- Om enbart avrundningar så är ε litet och diskretiseringsfelet kommer att dominera
- Om *f(x)*-värdena kommer från mätningar med stor osäkerhet kan ε vara betydligt större och få effekt på totala noggrannheten.

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

Noggrannhet

- Felkällor:
  - Kontinuerligt ersätts av diskret =>diskretiseringsfel
  - Fel i beräkning av $f(x_k)$ => funktionsfelet
- Exakt integral: *I*, kvadraturformel: $\int_a^b f(x)dx\approx Q(h)$
  Exakt summa: $Q(h)$, beräknad summa: $\tilde{Q}(h)$
- $\tilde{Q}(h)$ blir då approximationen av *I*
  och absoluta felet
  $$I-\tilde{Q}(h)=\underbrace{I-Q(h)}_{\text{diskretiseringsfel}}+\underbrace{Q(h)-\tilde{Q}(h)}_{\text{funktionsfel}}$$
  kallas även trunkeringsfel

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se