



## Block 5: Ickelineära ekvationer

### Löpsedel: Icke-lineära ekvationer

- Varför är det svårt att lösa icke-lineära ekvationer?
- Iterativa metoder
- Bisektion/intervallhalvering
- Newton-Raphsons metod
- Noggrannhet/stoppvillkor
- Konvergenshastighet/exekveringstid

### Läroboken

Kap 5.1 (s 114-116), 5.4 (s 122-128), 5.6 (s.132-135)  
Kap 6.2 (s 144-149), 6.4 (s 151-154), 6.6 (s 157-161)

### Vad visade laborationen?

- Tillämpningsexempel
- Standardformulering av icke-lineär ekvation:  $f(x) = 0$
- Ekvationen representeras i Matlab genom att vi definierar en Matlab-funktion som beskriver  $f(x)$
- Matlabs inbyggda kommando för att lösa  $f(x) = 0$  heter **fzero**
- **fzero** finner *ett* nollställe per anrop

### Vad gör fzero?

- **fzero** bygger på en kombination av två olika grundalgoritmer: **bisektionsmetoden**, **sekantmetoden** (en variant av **Newton-Raphsons metod**) (dessutom används invers interpolation, som vi förbigår här)

### Kan datorn inte bara räkna ut lösningen...? Det finns väl formler för lösningarna?

Nej !!

- Polynomekvationer kan bara lösas upp till grad 4
- Exakt lösning i matematisk mening ger sällan siffrvärden

Hur beräknas egentligen  $\sqrt{2}$  ?

Informationsteknologi

UPPSALA UNIVERSITET

## Iterativ metod

```

x = startgissning
while stoppvillkor ej uppfyllt
  x = ny gissning
end while

```

Kan lyckas: *konvergens*  
 eller misslyckas: *divergens*

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

UPPSALA UNIVERSITET

## Bisektionsmetoden, idé

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

UPPSALA UNIVERSITET

## Bisektionsmetoden, pseudokod

*Indata:* Startintervall  $[a, b]$  så att  $f(a)$  och  $f(b)$  har olika tecken

```

xl = a
xu = b
while stoppvillkor ej uppfyllt
  xr = xl + (xu-xl)/2
  if sign(f(xl)) = sign(f(xr)) then
    xl = xr
  else
    xu = xr
  end if
end while

```

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

UPPSALA UNIVERSITET

## Newton-Raphsons idé

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

UPPSALA UNIVERSITET

## Från idé till formel

Tangentens lutning:  $f'(x_0)$

Tangentens lutning:  $(0-f(x_0))/(x_1-x_0)$

Ger:  $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

UPPSALA UNIVERSITET

## Newton-Raphsons metod, pseudokod

```

x = startgissning
while stoppvillkor ej uppfyllt
  x = x - f(x)/fprime(x)
end while

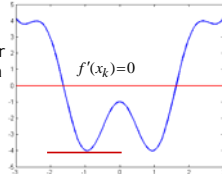
```

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

## Newton-Raphsons brister

Newton-Raphsons metod är snabb men...

- Ganska mycket kan gå fel...
  - Hamnar nära eller i extrempunkt =>  $f'(x_k)$  blir 0 eller nästan 0
  - Svårt att förutse vilket nollställe som hittas, någon punkt hamnar på en plats så att tangenten "skjuter" iväg till ett annat nollställe
  - Kan även hamna i cykliska förlopp – studsar hela tiden mellan samma sekvens av värden



## Robustare: Bisektion + N-R

- Man kan visa att N-R konvergerar om startgissningen är "tillräckligt nära" lösningen
- Hur kommer man "tillräckligt nära"? Koppla in Bisektionsmetoden, t ex så här:

1. Bestäm ett intervall där nollstället finns
2. Kör N-R
3. om konvergens så klart annars (om N-R t ex hamnat utanför intervallet) koppla in Bisektion några steg för att minska intervallet
4. Gå till punkt 1 med nytt intervall

- Kombinerar N-R:s snabbhet och Bisektions säkerhet. **fzero** innehåller en mer sofistikerad algoritm i denna anda.