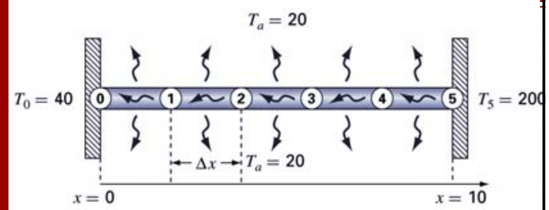
Fallstudie: lineära ekvationssystem

Baserad på läroboken, Case Study 9.5

Informationsteknologi

Värmeledning i oisolerad stav



Problem: Beräkna temperaturen T(x) då lufttemperaturen är 20 °C, vänstra väggens temperatur är 40 °C och högra väggens temperatur är 200 °C.

Informationsteknologi

Matematisk modell

$$\frac{d^2T}{dx^2} + h'(T_a - T) = 0$$

Temperatur i staven: T(x) (°C)
Avstånd längs staven: x (m)
Värmeöverföringskoefficient: h′ (m^{-2})
Lufttemperatur: T_a (°C)

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

Angreppssätt

Differentialekvationen kan i detta fall lösas analytiskt (läroboken sid 230).

Men många differentialekvationer kan inte lösas exakt. Man kan ändå få fram en användbar approximativ lösning genom att använda beräkningsvetenskapliga metoder. Vi provar nu ett sådant angreppssätt.

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

Angreppssätt

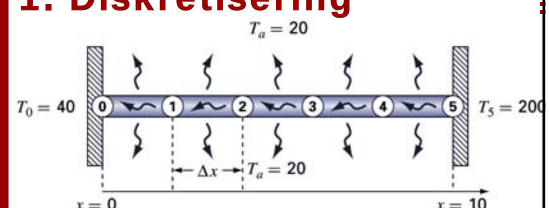
Steg i numerisk lösning av vårt problem:

1. Diskretisering:
   a. Diskreta punkter längs staven
   b. Approximation av derivatan
2. Lösning av det lineära ekvationssystem som blir resultatet av diskretiseringen

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

1. Diskretisering



Diskreta punkter: $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$
[generellt: $x_0, x_1, \ldots, x_n$; n+1 stycken punkter
n stycken intervall, Δx=10/n]

Approximativt temperaturvärde i x_i: T_i

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Diskretisering (forts.)

$$\frac{d^2T(x_i)}{dx^2} \approx \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}$$

där i = 1, 2, 3, 4 [generellt: i = 1, 2,...,n-1]

Informationsteknologi

Diskretisering (forts.)

Insättning i differentialekvationen ger approximativ modell:

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} + h^{'}(T_a - T_i) = 0$$

där i = 1, 2, 3, 4 [generellt: i = 1, 2,...,n-1]

4 ekvationer, 4 obekanta
[generellt: n-1 ekvationer, n-1 obekanta]

Informationsteknologi

2. Lösning av linjärt ekvationssystem

Med parametervärden:
n = 5 h'=0.01 Δx=2 T_a = 20

T_0 = 40 T_5 = 200

$$\begin{bmatrix} 2.04 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2.04 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2.04 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2.04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40.8 \\ 0.8 \\ 0.8 \\ 200.8 \end{bmatrix}$$

Informationsteknologi

Lösning av linjärt ekvationssystem

Algoritmskiss:

Lagra koefficientmatrisen i en motsvarande datastruktur A

Lagra högerledsvektorn i en motsvarande datastruktur b

Lös ekvationssystemet AT = b och lagra lösningen i datastrukturen T

Rita upp lösningspunkterna, med x_i på x-axeln och T_i på y-axeln

Informationsteknologi

Lösning av linjärt ekvationssystem

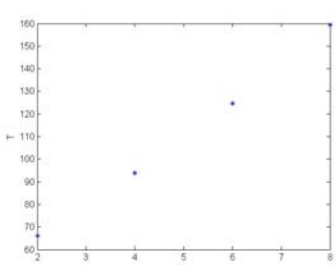
Implementering i Matlab, för vårt speciella fall:

```
A = [2.04 -1    0    0
       -1  2.04 -1    0
        0   -1  2.04 -1
        0    0   -1  2.04];

b = [40.8  0.8  0.8  200.8]';

T = A\b;
x = linspace(2,8,4);
plot(x,T,'*')
```

Informationsteknologi

Lösning av linjärt ekvationssystem

Resultat när programmet körs:



Informationsteknologi

Informationsteknologi

Att fundera på

- Hur skulle ett program kunna se ut där användaren får ge värden på n, h′, T_a, T_0, T_n?
- Kan man i detta fall utnyttja matrisens speciella struktur för att lösa systemet effektivare?
- Vilka felkällor finns det i vårt sätt att bestämma temperaturen i staven?