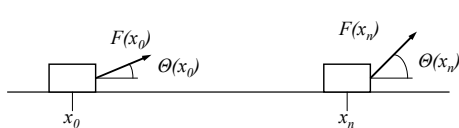


Fallstudie: numerisk integration

Baserad på läroboken,
Case Study 17.9

Att beräkna arbete



Problem: Beräkna arbetet för att förflytta blocket från x_0 till x_n givet kraften $F(x)$ och vinkeln $\theta(x)$

Matematisk modell

$$W = \int_{x_0}^{x_n} F(x) \cos(\theta(x)) dx$$

Beteckningar

W: arbetet (Joule)

x: position i rummet (meter)

F(x): kraftens storlek i punkten x (Newton)

$\theta(x)$: vinkeln i punkten x (radianer)

Angreppssätt

Olika angreppssätt för olika fall:

- F(x) och $\theta(x)$ givna som formler och "enkla": **analytisk integration**
- F(x) och $\theta(x)$ givna som formler men "svåra": **numerisk integration**
- F(x) och $\theta(x)$ givna som mätvärden: **numerisk integration**

Angreppssätt (forts.)

I föreläsningarna har vi lärt oss:
Steg i numerisk lösning av problemet:

1. Diskretisering:
 - a. Diskreta punkter i integrationsintervall
 - b. Approximation av integranden med styckvis polynom
 - c. Bestämning av integralen av det styckvisa polynomet
2. Den formel som blir resultatet av a,b,c tillämpas på våra aktuella data; det beräknade värdet blir vårt approximativa värde på **W**.

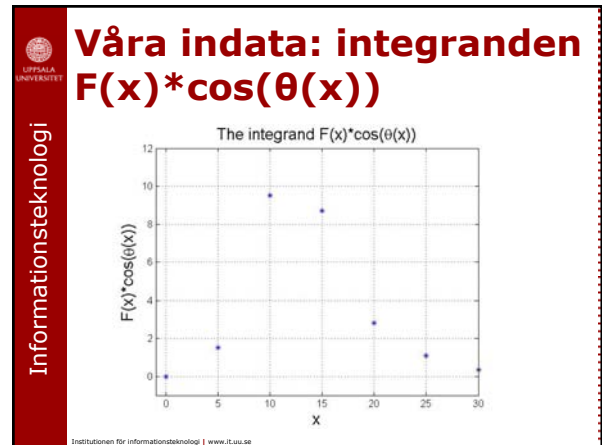
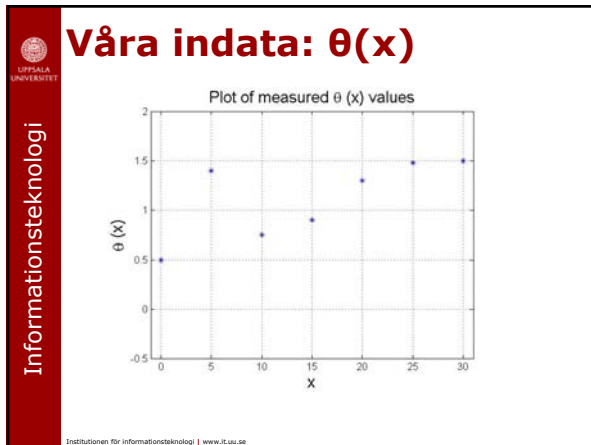
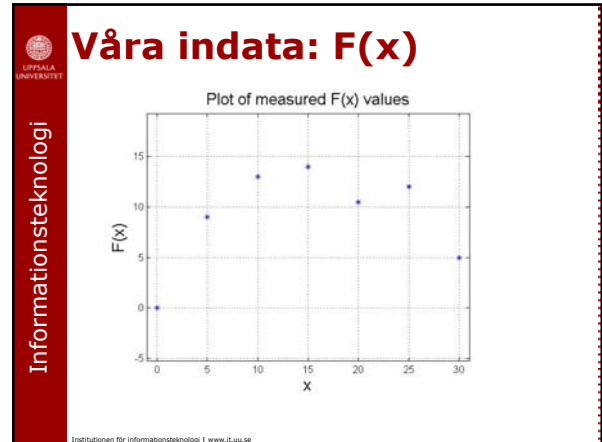
Angreppssätt (forts.)

Viktigt att notera:

- När steg 1 a,b,c utförs på en allmän integral, så leder det till en generell formel för numerisk integrering. Så har exempelvis trapetsformeln och Simpsons formel härletts. Normalt går man alltså **direkt till steg 2**
- Diskretiseringsfelet kallas här **trunkeringsfel** och det minskar med minskande steglängd (ökande antal punkter).

I vårt fall: $F(x)$ och $\theta(x)$ är givna i form av mätvärden

x	F(x)	$\theta(x)$
0	0.0	0.50
5	9.0	1.40
10	13.0	0.75
15	14.0	0.90
20	10.5	1.30
25	12.0	1.48
30	5.0	1.50



Lösning med trapetsformeln

Låt $g(x)$ beteckna vår integrand:
 $g(x) = F(x)\cos(\theta(x))$

$$W \approx T(h) = \frac{h}{2} \left[g(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i) + g(x_n) \right]$$

Skriv ett program som löser vårt problem med denna metod. Använd Matlabs inbyggda funktion `trapz`. Använd samtliga tillgängliga punkter och uppskatta felet med tredjedelsregeln.

Algoritmskiss

Lagra våra x-värden i en variabel `x`
 Lagra våra $F(x)$ -värden i en variabel `F`
 Lagra våra $\theta(x)$ -värden i en variabel `theta`
 Beräkna $g(x)$ för våra givna x-värden och lagra resultatet i en variabel `g`
 Givet alla våra x-värden, bestäm `h`
 Beräkna `T(h)`, lagra i variabeln `I1`
 Beräkna `T(2h)`, lagra i variabeln `I2`
 Beräkna uppskattat fel $(T(h)-T(2h))/3$ och lagra värdet i variabeln `fel`
 Skriv en resultatutskrift (med `I1` och `fel`)

Informationsteknologi

Implementering i Matlab

```
x = [0 5 10 15 20 25 30];
F = [0.0 9.0 13.0 14.0 10.5 12.0 5.0];
theta = [0.50 1.40 0.75 0.90 1.30 1.48
1.50];
g = F.*cos(theta);
I1 = trapz(x,g);
I2 = trapz(x(1:2:7),g(1:2:7));
fel = (I1-I2)/3;
disp(['Approximativt värde på W: '
num2str(I1)])
disp(['Uppskattat diskretiseringsfel: '
num2str(fel)])
```

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

Utskrift när programmet körs

Approximativt värde på W: 119.0892
Uppskattat diskretiseringsfel: -1.9621

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

Hur noggrant kan vi bedöma att det beräknade W-värdet är?

F(x)-värdena (och därmed g(x)-värdena) är givna med en korrekt decimal
Funktionsfelet i beräkningen av W ovan kan då till absolutbeloppet vara så stort som:

$$(30-0) \cdot 0.5 \cdot 10^{-1} = 1.5$$

Totalt kan felet till absolutbeloppet uppskattas vara högst ca $1.5 + |-1.9621| \approx 3.5$
Slutsats: $W \approx 119 \pm 3.5$
OBS! Detta är den uppskattning av felet som våra data medger. Det verkliga felet kan vara större.

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

Generellare program

- Fallet då experimentdata finns lagrade i .MAT-fil

```
disp('Data förutsätts vara lagrade i .MAT-fil')
fil = input('Ange filnamnet (utan .MAT): ','s');
load(fil)
np = length(x); % Antal punkter
g = F.*cos(theta);
I1 = trapz(x,g);
I2 = trapz(x(1:2:np),g(1:2:np));
fel = (I1-I2)/3;
etcetera
```

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

Generellare program

- Fallet när en formel för g(x) är given som en Matlab-funktion **g(x)**

```
v = input('Ge integrationsintervallet [a b]: ');
n = input('Ge önskat antal delintervall: ');
x = linspace(v(1),v(2),n+1);
gvalues = g(x);
I1 = trapz(x,gvalues);
I2 = trapz(x(1:2:np),gvalues(1:2:np));
fel = (I1-I2)/3;
```

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

Att fundera på

- Vad skulle behövas för att programmet automatiskt skulle kunna beräkna integralen med en viss av användaren önskad noggrannhet? (I vilka fall är det realistiskt? Hur skulle en algoritm kunna se ut?)

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se