

Fallstudie: Icke-lineära ekvationer

Baserat på läroboken,
Case Study 6.6

Rinnande vätska i rör

- Bestämning av flöde av gas eller vätska i rör viktigt inom många områden, t ex blodflöde och kylsystem
- Motståndet/friktionen i ett sådant flöde kan beskrivas med ett dimensionslöst tal, *friktionskoefficienten*

Matematisk modell

För turbulent strömning gäller:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \cdot \log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.51}{\text{Re} \cdot \sqrt{f}} \right)$$

där

- ε = rörets "ytråhet" (m)
- D = diameter (m)
- Re = Reynoldstalet (dimensionslös)

Sökt: f

Matematisk modell

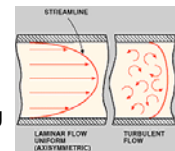
Reynoldstalet kan beräknas med:

$$\text{Re} = \frac{\rho V D}{\mu}$$

där

- ρ = fluidens densitet (kg/m³)
- V = hastigheten (m/s)
- μ = dynamisk viskositet (Ns/m²)

Reynoldstalet beskriver om fluiden strömmar *laminärt* eller *turbulent*, stort tal innebär turbulent strömning



Angreppssätt

- Ekvationen skrivs om
$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{f}} + 2.0 \cdot \log_{10} \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.51}{\text{Re} \cdot \sqrt{f}} \right)}_{= g(f)} = 0$$

- Problemet blir nu att hitta nollstället till $g(f)$
- Till detta kan **fzero** användas i Matlab – krävs då att $g(f)$ definieras i en matlab-funktion

Algoritmskiss

- Definiera konstanter
 $e = 1.5e-6$, $\rho = 1.23$, $\mu = 1.79e-5$
 $D = 0.005$, $V = 40$
- Läs in startgissning eller startintervall
- Beräkna nollställe med **fzero**
- Gör utskrift
Om lösning ok
skriv ut lösning
annars
ge felutskrift "ingen lösning hittas"

Implementering i Matlab

Definiera funktionen:

- Inparameter: f
- Utparameter: funktionsvärdet $g(f)$, kallas gf
- Övriga parametrar fungerar som konstanter och sätts globala så de kan ändras i "huvud-programmet"

```
function gf = colebrook(f)
%
global e rho V D mu

Re = rho*V*D/mu;
sqrtf = sqrt(f);
t = e/(3.7*D) + 2.51/(Re*sqrtf);
gf = 1/sqrtf + 2*log10(t);
```

Institutionen för Informationsteknologi | www.it.uu.se

Implementering i Matlab

- Var ungefär ligger nollstället?
- Några problem som kan uppstå vid användning av **fzero**?
- För att få svar på detta bör man plotta $g(f)$ på lämpligt intervall

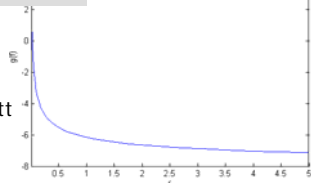
Enklast att använda **fplot** eftersom $g(f)$ finns definierad i en matlabfunktion

Institutionen för Informationsteknologi | www.it.uu.se

Implementering i Matlab

global e rho V D mu;

```
e = 1.5e-6; rho = 1.23;
mu = 1.79e-5; D = 0.005;
V = 40;
fplot(@colebrook, [0 5]);
xlabel('f');
ylabel('g(f)');
```

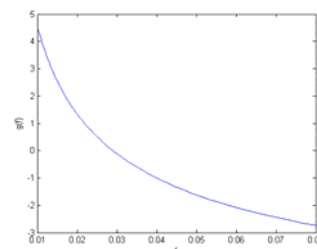


Inte så bra! Svårt att se var nollstället är

Institutionen för Informationsteknologi | www.it.uu.se

Implementering i Matlab

Ändra intervall till t ex [0.01 0.08]



Institutionen för Informationsteknologi | www.it.uu.se

Implementering i Matlab

Skriv kommandofil ("huvudprogrammet"), sparas här i *friction.m*

```
global e rho V D mu % Globala parametrar
% Sätt konstanter
e = 1.5e-6; rho = 1.23;
mu = 1.79e-5; D = 0.005; V = 40;
% Beräkna nollställe
f0 = input('Ge startgissning: ') % Startgissning
[f, gf, ok] = fzero(@colebrook, f0);
% Utskrifter
if ok==1
    disp(['Friktionskoefficienten är ' num2str(f)]);
else
    disp('Ingen lösning hittades');
end
```

Institutionen för Informationsteknologi | www.it.uu.se

Exekvering

Det visar sig att det inte är helt enkelt att hitta nollställe om man ger startgissning som en punkt

```
>> friction
Ge startgissning: 1
Exiting fzero: aborting search for an interval
containing a sign change because complex
function value encountered during search.
(Function value at -0.28 is -6.9006-3.0538i.)
Check function or try again with a different
starting value.
Ingen lösning hittades
```

Institutionen för Informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

Exekvering

Prövar med ett mindre värde...

```
>> friction
Ge startgissning: 0.01
Exiting fzero: aborting search for an interval
containing a sign change because complex
function value encountered during search.
(Function value at -0.0028 is -4.92374-20.2422i.)
Check function or try again with a different
starting value.
Ingen lösning hittades
```

Funktionen känslig för val av startgissning

Institutionen för Informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

Exekvering

Genom att använda plotten kan man lägga sig närmare nollstället

```
>> friction
Ge startgissning: 0.03
Friktionskoefficienten är 0.028968
```

Ett annat alternativ är att ge ett startintervall istället (måste vara olika tecken på funktionen i intervallgränserna)

```
>> friction
Ge startgissning: [0.02 0.05]
Friktionskoefficienten är 0.028968
```

Institutionen för Informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

Mer om fzero

- Om man vill få ut mer information ur **fzero** eller vill ändra på t ex toleranser kan man använda **optimset**
- Gör **help optimset** för information
- Exempel
Ändra i koden:

```
...
val = optimset('display','iter');
[f, gf, ok] = fzero(@colebrook, f0, val);
...
```

Institutionen för Informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

Mer om fzero

- Exekvering

```
>> friction
Ge startgissning: [0.01 1]
```

Func-count	x	f(x)	Procedure
2	0.08	-2.74163	initial
3	0.0537195	-1.8073	interpolation
4	0.0318598	-0.31136	bisection
5	0.0282048	0.089725	interpolation
6	0.0290224	-0.006292	interpolation
7	0.0289689	-0.000120	interpolation
8	0.0289678	2.698e-09	interpolation
9	0.0289678	-6.83e-014	interpolation
10	0.0289678	-8.881e-016	interpolation
11	0.0289678	-8.881e-016	interpolation

Zero found in the interval [0.01, 1]
Friktionskoefficienten är 0.028968

Institutionen för Informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

Mer om fzero

- Exempel
Eller ändra toleransen i stoppvillkoret till 10^{-3} (standardvärdet är 10^{-6} i **fzero**)

```
...
val = optimset('tolX',1e-3);
[f, gf, ok] = fzero(@colebrook, f0, val);
...
```

Institutionen för Informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

Att fundera på

- Kan man på något sätt automatisera startgissningen?
Kan man hitta en startgissning som ligger nära lösningen?
- Effektivitet, beräkningstid, antal iterationer – påverkas av startgissning
- Robusthet hos algoritmen
Hybrid av flera metoder. Viktigt att metoden meddelar när något gått fel

Institutionen för Informationsteknologi | www.it.uu.se

Bättre startgissning

I det här fallet finns en formel som ger en uppskattning av f

$$f = \frac{1.325}{\left[\log\left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{5.74}{Re}\right) \right]^2}$$

Vi kan utnyttja den för att hitta en bra startgissning

Bättre startgissning

```
global e rho V D mu % Globala parametrar
% Sätt konstanter
e = 1.5e-6; rho = 1.23;
mu = 1.79e-5; D = 0.005; V = 40;
% Startgissning
Re = rho*V*D/mu;
f0 = 1.325/(log((e/3.7*D) + (5.74/Re^0.9)))^2;
% Beräkna nollställe
val = [];
[f, gf, ok] = fzero(@colebrook, f0, val);
% Utskrifter
if ok==1
    disp(['Friktionskoefficienten är ' num2str(f)]);
else
    disp('Ingen lösning hittades');
end
```

Bättre startgissning

- Blev det bra?
Använd t ex optimset för att studera mer i detalj. Sätt

```
...
val = optimset('display','iter');
[f, gf, ok] = fzero(@colebrook, f0, val);
...
```

Bättre startgissning

Resultat (siffror avhuggna p g a platsbrist):
Search for an interval around 0.02842 containing a sign change:

	a	f(a)	b	f(b)	Procedure
1	0.028	0.064	0.0284	0.0640	initial interval
3	0.027	0.161	0.0292	-0.0293	search

Search for a zero in the interval [0.0276,0.0292]:

	x	f(x)	Procedure
3	0.0292242	-0.0293867	initial
4	0.0289765	-0.0009995	interpolation
5	0.0289678	1.8712e-007	interpolation
6	0.0289678	-4.04148e-011	interpolation
7	0.0289678	-8.88178e-016	interpolation
8	0.0289678	-8.88178e-016	interpolation

Zero found in the interval [0.02761, 0.02922]
Friktionskoefficienten är 0.028968