# Block 2: Lineära system

Del 2

Informationsteknologi

## Löpsedel

*Dagens föreläsning*

- Noggrannhet:
  Residual och konditionstal
- Normer
- Varför A\b är effektivare än inv(A)*b?



Informationsteknologi

## Läroboken

- Kap 11.2 (s 253-258)
- OBS: Läroboken ger *en* feluppskattning, men ytterligare feluppskattningar ingår i kursen

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

## Noggrannhet

$$Ax = b$$

Exakt lösning: $x$

Beräknad lösning: $\tilde{x}$

Hur noggrann är den beräknade lösningen?

"Naturlig" test:
Sätt in $\tilde{x}$ i VL och jämför med HL:

$$b - A\tilde{x}$$ *residualen*

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

## Residualen, exempel

$$A = \begin{pmatrix} 1.2969 & 0.8648 \\ 0.2161 & 0.1441 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0.8642 \\ 0.1440 \end{pmatrix}$$

```
>> xe = single(A)\single(b)
  xe =
      1.5443
     -1.3166
>> xd = A\b
  ans =
      2.0000
     -2.0000
```

A och b i enkel precision

A och b i "vanlig", dubbel precision

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

## Residualen, exempel

```
>> res=b-A*xe
  res =
  1.0e-007 *
         0
   -0.1490
>> xd-xe
  ans =
   -0.4557
    0.6834
```

Residualen liten (exakt upp till enkel precision)

Men felet stort

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

## Residualen

- Slutsats:
  Residualen är inte ett tillförlitligt mått på noggrannheten!
- Varför?
  Problemet i exemplet är störnings-känsligt, *illakonditionerat*
- Måste ha ett annat sätt att uppskatta felet



Informationsteknologi

## Norm

Först…

- För att mäta fel behöver vi ett sätt att mäta storlek på vektorer och matriser, en motsvarighet till absolutbelopp för skalärer
- Detta görs med normer, betecknas $\| \;\; \|$
- Normer både för vektorer och matriser, *vektornorm* resp *matrisnorm*

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

## Norm

- Vektornorm
  Några vanliga normer för $x = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T$

$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ , 2-norm, euklidisk norm

$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$ , 1-norm, minnorm

$\|x\|_\infty = \max_i \{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ , $\infty$-norm, maxnorm

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

## Norm

- Olika normer?
  Vilken passar bäst?

1-norm:

2-norm:


Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

## Norm

- Matrisnorm

Definition: $\|A\| = \max_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$

Obs! baseras på vektornormer (*Ax* och *x* är vektorer)

- Definitionen används inte för att hitta normen för en viss matris, utan för härledningar
- Ur definitionen kan man härleda lättare formler för 1-norm, $\infty$-norm och 2-norm

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

Informationsteknologi

## Norm

- Ur definitionen kan man härleda

$\|A\|_1 = \max_j \left\{ \sum_i |a_{ij}| \right\}$ ,1-norm, minnorm

$\|A\|_\infty = \max_i \left\{ \sum_j |a_{ij}| \right\}$ , $\infty$-norm, maxnorm

$\|A\|_2 = \sqrt{\max\{\lambda(A^T A)\}}$ , 2-norm, euklidisk norm

- Vanligen används 1- eller $\infty$-norm eftersom 2-normen är mycket ”dyr” att beräkna

Institutionen för informationsteknologi | www.it.uu.se

## Norm

- I Matlab
  - norm(x) 2-normen av vektor *x*
  - norm(A) 2-normen av matrisen *A*
  - norm(A,1) 1-normen
  - norm(A,inf) $\infty$-normen

```
>> A=
     1    -2
     6     4
>> norm(A,1)
ans =
     7
```

```
>> norm(A,inf)
ans =
    10
>> norm(A)
ans =
    7.2170
```



## Konditionstal

- Nu kan man härleda förjande uppskattning av felet

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \le cond(A)\frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|}$$

där $cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ kallas för *A*:s konditionstal

- Tolkning:
  Rel fel i $x \le$ kond tal $*$ rel fel i högerled b
- Fel i indata, *b* kan alltså förstärkas med en faktor *cond(A)* i beräkningsprocessen



## Konditionstal

- Beräkning av konditionstal kan baseras på de olika normerna
- Vårt gamla exempel

$$A = \begin{pmatrix} 1.2969 & 0.8648 \\ 0.2161 & 0.1441 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} cond_2(A) &= 2.5\cdot 10^8 \\ cond_1(A) &= 3.3\cdot 10^8 \\ cond_\infty(A) &= 3.3\cdot 10^8 \end{aligned}$$

Rel felet i *b* är i bästa fall avrundningsfelet, dvs ca $10^{-16}$ (i enkel prec ca $10^{-8}$ ). I enkel prec kan all noggrannhet förstöras, i dubbel prec ”halva” noggrannheten



## Konditionstal

- Stort konditionstal/illakonditionerat problem tyder på att matrisen är ”nästan” singulär
- I matematiken är en matris antingen singulär eller icke-singulär - här kan en matris vara ”nästan” singulär
- Stort konditionstal
  - beror på det underliggande problemets natur, t ex att den fysikaliska verklighet är störningskänslig
  - beror inte på/påverkas inte av val av algoritm
- Konditionstalet fungerar som en varning –felet *kan* bli stort



## Konditionstal

- Konditionstalet fungerar som en varning –felet *kan* bli stort
- Gäller att

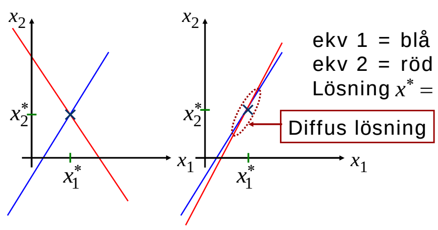
$$1 = \|I\| = \|A^{-1}A\| \le \|A^{-1}\|\|A\| = cond(A)$$

- Konditionstalet är alltså i bästa fall 1 – medför ingen förstärkning alls av felet



## Konditionstal

- Väl- resp illakonditionerat kan åskådliggöras (för två obekanta)




ekv 1 = blå linje
ekv 2 = röd linje
Lösning $x^* = (x_1^* \; x_2^*)^T$

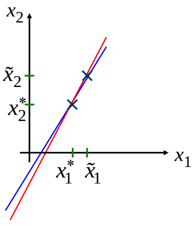
- Illakonditionerat har ”diffus lösning”

Informationsteknologi

## Konditionstal

Varför är residualen ej tillförlitlig?

Bilden visar en beräknad lösning $\tilde{x}$ där
- $x^* - \tilde{x}$ är stor
- $\tilde{x}$ ligger nästan på graferna, dvs uppfyller $A\tilde{x} \approx b$ dvs liten residual




- Residual ej tillförlitlig då illa-konditionerat problem



Informationsteknologi

## Använda inversen

- Ett alternativ till att lösa Ax=b med LU-faktorisering skulle kunna vara $x = A^{-1}b$

```
>> A = rand(1000,1000);
>> b = rand(1000,1);
>> tic; x = A\b; toc
Elapsed time is 0.827794 seconds.
>> tic; x = inv(A)*b; toc
Elapsed time is 1.863096 seconds.
```

- Inversberäkning tar mer än dubbelt så lång tid. Varför?



Informationsteknologi

## Använda inversen

- Att beräkna inversen motsvarar att lösa ekvationssystem med *n* st högerled

$$Aug = \left( \begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \end{array} \right)$$

*n* stycken kolonner

- Kan lösas med LU-faktorisering en gång, sedan *n* st framåt- och bakåtsubstitutioner
  - LU-faktorisering: $\frac{2}{3}n^3$
  - Framåt- bakåt subst: $\frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2}$



Informationsteknologi

## Använda inversen

- Antal operationer för $x = A^{-1}b$ :

$$\frac{2}{3}n^3 + n \cdot n^2 = \frac{5}{3}n^3$$

- Antal operationer för $x = A\backslash b$, dvs gausselimination (med LU-faktorisering):

$$\frac{2}{3}n^3 + n^2 \approx \frac{2}{3}n^3$$

- Slutsats: Lös inte linjära ekvationssystem med invers



Informationsteknologi

## Använda inversen

- Man brukar generellt akta sig för att beräkna inversen pga den ”dyra” beräkningen
- Hur beräknas $cond(A) = \left\| A^{-1} \right\| \cdot \left\| A \right\|$ ?
  Svar: Vanligen används uppskattningar. I Matlabs backslash används detta alltid.

Uppskattning säger att $cond(A) \approx 10^{20}$

```
>> x = A\b;
Warning: Matrix is close to singular
         or badly scaled.
         Results may be inaccurate.
         RCOND = 8.113755e-020.
```