

Problemlösning Linjära ekvationssystem

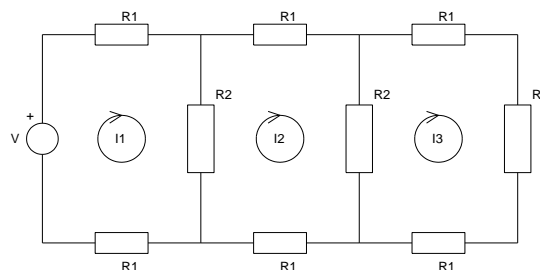
Baserat på ett problem med en elektrisk krets

Jfr. läroboken, Case Study 9.5

1

En elektrisk krets

Figuren föreställer en elektrisk krets med spänningskälla och ett antal motstånd.



Enligt den *matematiska modell* som ges av Ohms och Kirchhoffs lagar kan man sätta upp ett ekvationssystem för strömstyrkorna i de tre slutna kretsarna. Dessa är antydda med pilar i figuren.

2

Ekvationssystem

Ekvationssystemet ser ut som

$$\begin{aligned}(2R_1 + R_2)I_1 - R_2I_2 &= V \\ (2R_1 + 2R_2)I_2 - R_2I_1 - R_2I_3 &= 0 \\ (2R_1 + 2R_2)I_3 - R_2I_2 &= 0\end{aligned}$$

Varje ekvation erhålls genom att följa spänningsändringarna genom en sluten krets och kräva att det totala spänningsfallet blir 0.

För tydlighets skull har spänningskällan, som är speciell för en krets, satts in i högerledet.

3

Matrisform

Om vi t.ex. har värdena $R_1 = 1$, $R_2 = 3$ och $V = 5$, så kommer ekvationssystemet på matrisform att se ut som

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ -3 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Man kan nu tänka sig att man vill lösa detta ekvationssystem genom att använda MATLAB.

4

Algoritm

Algoritmskiss:

- Lagra koefficientmatrisen i en lämplig datastruktur A.
- Lagra högerledsvektorn i en motsvarande datastruktur b.
- Lös ekvationssystemet $Ax = b$, (sökt lösning kallas här x).
- Presentera lösningen, som siffror eller grafiskt.

5

Implementering

Implementering i MATLAB av *detta speciella fall*:

```
A = [ 5  -3  0; ...
      -3  8 -3; ...
      0  -3  8];
b = [ 5  0  0 ]';
x = A\b;
m = [1 2 3]; % Sätt index
x
plot(m,x,m,x,'*')
axis([0 4 0 2])
```

Körning av detta ger resultatet:

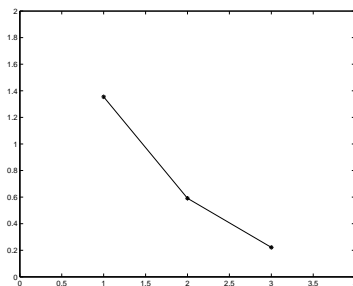
```
x =

    1.3547
    0.5911
    0.2217
```

6

Grafiskt resultat

Plotten ser ut som

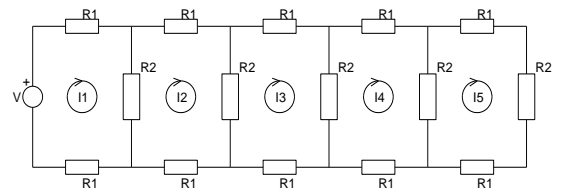


Observera att detta är strömmarna i varje enskild sluten krets. Nettoströmmarna i varje ledningsgren får beräknas ur dessa,

7

Generalisering

Man skulle kunna tänka sig motsvarande koppling med ett godtyckligt antal kretsar. T.ex. 5 kretsar:



Motsvarande *koefficientmatris* skulle se ut som

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 8 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

8

Generalisering, forts.

På samma sätt kan man tänka sig att det ingår flera spänningskällor i systemet. Så länge dessa ligger i den yttre ledningen (bredvid R_1 -motstånden), så kan de lätt placeras in i *högerledet* i motsvarande krets.

En ändrad resistans på någon av motståndstyperna skulle däremot yttra sig som en ändring av koefficienterna i *matrisen*. Insättandet av flera typer av motstånd skulle resultera i att matriskoefficienterna inte blir lika "regelbundna".

Generellare algoritm

En algoritm för detta fall kunde vara:

- Tag reda på antal kretsar, spänningen V och resistanserna R_1, R_2 (ev. fler).
- Generera korrekt koefficientmatris. Observera matrisens regelbundna struktur. Börja med en nollmatris och lägg sedan in de (relativt få) nollskilda elementen.
- Sätt in V på rätt plats(er) i högerledet.
- Lös ekvationssystemet och presentera resultatet.

Stort fast nätverk

För ett stort nätverk kan uträkningen av matrisen bli omfattande. Om nätverket är fast kan den då göras *en* gång och sparas på fil tillsammans med övriga data.

Studera följande MATLAB-kommandon/funktioner för att se hur detta görs.

- `save`
- `load`

En del av algoritmen förändras då till att lokalisera och läsa in sparade data.

Beräkningsarbete med programmet

Med en färdig matris som representerar ett elektriskt nätverk, kan man nu formulera ett program som utför olika typer av beräkningar:

- Man kan skriva ett program som med inladdad matris gör *en* körning med ett antal spänningskällor som användaren specificerar.
- Man kan bygga ut detta till att göra ett *flertal* körningar, så att användaren kan experimentera med olika placering och styrka på spänningskällorna. Resultaten kan studeras *interaktivt* som siffror och grafik.
- Man kan låta programmet spara en eller fler resultat på *filer*, (sifferdata), för att andra användare skall kunna studera resultaten. Ev. kan andra program göra statistiska undersökningar av materialet.