

Tentamen i Beräkningsvetenskap II/NV2

Tid: 8⁰⁰ – 13⁰⁰. **Hjälpmedel:** Mathematical Handbook (Beta), Miniräknare.

This examination is available in english.

1. Låt A vara den $N \times N$ -matris som uppfyller

$$(Av)_j = \begin{cases} v_1 - v_N, & j = 1, \\ v_j - v_{j-1}, & j = 2, \dots, N, \end{cases}$$

för varje kolumnvektor v med N element. Här betecknar $(Av)_j$ element j i kolumnvektorn Av .

Låt F vara en $N \times N$ -Fouriermatris, dvs en matris med element

$$F_{k,j} = e^{2\pi ijk/N}, \quad k = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N,$$

där k är radindex, j är kolumnindex och i är den imaginära enheten.

(a) Skriv upp matrisen A för godtyckligt N . (1p)

(b) Visa att

$$(FAv)_k = d_k(Fv)_k, \quad k = 1, \dots, N,$$

där d_k är en skalär för varje k . (3p)

Bestäm d_k för $k = 1, \dots, N$. (2p)

(c) Visa att alla d_k beräknade i (b) är egenvärden till A . Tips: egenvektor k är $v^{(k)} = (v_1^{(k)}, \dots, v_N^{(k)})^T$, där $v_j^{(k)} = e^{-2\pi ijk/N}$. (2p)

2. Betrakta ekvationssystemet $Ax = b$, där

$$A = \begin{pmatrix} -2N^2 & N^2 & & & \\ N^2 & -2N^2 & N^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & N^2 & -2N^2 \end{pmatrix}$$

är en $(N-1) \times (N-1)$ -matris och $b = (1, 1, \dots, 1)^T$.

(a) Jacobis metod för iterativ lösning av linjära ekvationssystem har formen

$$x^{k+1} = Mx^k + c.$$

Skriv upp elementen i M och c för det givna systemet. (2)

(b) Använd Gershgorins sats för att uppskatta M s spektralradie. Vad säger detta om konvergensen hos Jacobis metod? (2)

(c) Matrisen A har bara reella och negativa egenvärden λ_k . Föreslå en algoritm för att beräkna endast det största. (2)

(d) Egenvärdena till Sturm-Liouville-problemet

$$\begin{aligned} u'' &= \mu u, & 0 < x < 1, \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned}$$

är $\mu_k = -k^2\pi^2$, $k = 1, 2, \dots$. Använd detta för att uppskatta konvergenzhastigheten hos den algoritm du föreslog i (c). (2)

3. Låt $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.

- (a) Bestäm a , b , c och d så att $p(x)$ är den bästa approximationen av $f(x)$, $-1 < x < 1$, i minsta kvadrat-mening. Funktion $f(x)$ är given av

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x \leq 0, \\ 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Använd ortogonala polynom. (6p)

- (b) Skriv upp normalekvationerna associerade med de basfunktioner som användes i (a). (2p)

4. Betrakta $u_t = u_{xx}$ och diskretiseringen

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = \theta D_+ D_- v_j^{n+1} + (1 - \theta) D_+ D_- v_j^n, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

- (a) Använd Fouriermetoden för att visa att schemat är ovillkorligt stabilt om $\theta \geq 1/2$. (3p)
Vilket stabilitetsvillkor gäller då $\theta < 1/2$? (1p)
- (b) Beräkna schemats noggrannhetsordning. (3p)
- (c) Använd dina resultat i (a) och (b) för att säga under vilka villkor som lösningen till differensschemat konvergerar mot lösningen till differentialekvationen då $\Delta t \rightarrow 0$ och $\Delta x \rightarrow 0$. (1p)

5. Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} u'' + au &= f, & 0 < x < 1, \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned}$$

där a är en konstant och f är en funktion av x .

- (a) Härled variationsformuleringen av ekvationen. (2p)
- (b) Definiera finita-element-metoden (FEM) för fallet med kontinuerliga och styckvis linjära funktioner på ett likformigt nät. (2p)
- (c) Skriv upp det linjära system som är associerat med FEM. (2p)
- (d) Skissa kort på vad som kommer att bli annorlunda om nätet inte är likformigt. (2p)