Uppsala universitet
Informationsteknologi
Avdelningen för teknisk databehandling

Beräkningsvetenskap II/NV2
2004-08-13

Tentamen i Beräkningsvetenskap II/NV2

Hjälpmedel: Mathematical Handbook (Beta), Miniräknare.

1. Betrakta följande överbestämda ekvationssystem:

$$\begin{cases} x+y+z=16 \\ 2x+y=16 \\ -x+y-z=4 \\ 2x-y=4 \end{cases}$$

   (a) Skriv upp matrisformuleringen av ekvationssystemet. (2p)

   (b) Lös ekvationssystemet i minsta-kvadratmening. (6p)

2. Låt A vara en kvadratisk matris.

   (a) Para ihop begreppen *Hermitesk, normal* och *unitär* med egenskaperna $A^{-1} = A^H$, $A = A^H$ och $A^H A = AA^H$. (1p)

   (b) Vilka egenskaper har Q och R, om $QR = A$ är en QR-faktorisering? (1p)

   (c) Enligt Schurs sats kan varje A Schuruppdelas, dvs $A = CTC^{-1}$ för något unitärt C och övertriangulärt T. Beskriv hur QR-faktorisering kan användas iterativt för att konstruera en approximativ Schuruppdelning. Du behöver inte ange något avbrottsvillkor. (2p)

   (d) En Schuruppdelning kan användas för att bestämma egenvärden till en matris. Hur och varför? (2p)

   (e) Visa att T i Schuruppdelningen är diagonal om A är Hermitesk. (2p)

3. Differentialekvationen

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_x, & t>0, 0<x<2\pi, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le 2\pi, \\ u(0,t) = u(2\pi,t), & t \ge 0, \end{cases}$$

   där α är en reell konstant, approximeras med

$$\frac{v_j^{n+1} - (v_{j+1}^n + v_{j-1}^n)/2}{k} = \alpha \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h}$$

   och begynnelse- och randvillkor. Både h och k är positiva.

   (a) Härled det lokala trunkeringsfelet. (4p)

   (b) Visa att schemat är stabilt då $k/h \le 1/|\alpha|$. (4p)

4. Konvergenshastigheten för potensmetoden applicerad på en matris A beror på $|\lambda_2/\lambda_1|$, där λ_1 är det egenvärde till A som har störst belopp och λ_2 det som har näst störst belopp.

   (a) Ska $|\lambda_2/\lambda_1|$ vara stort eller litet för snabb konvergens? (1p)

   (b) Hur kan man modifiera potensmetoden för att få bättre konvergens? (1p)

   (c) Visa att konvergenshastigheten hos potensmetoden beror på $|\lambda_2/\lambda_1|$. (6p)

5. Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} &u'' + au = f, \quad 0 < x < 1, \\ &u(0) = u(1) = 0, \end{aligned}$$

där a är en konstant och f är en funktion av x.

(a) Härled variationsformuleringen av randvärdesproblemet: Finn $u \in V$ så att

$$-\int_0^1 v'(x)u'(x)\,dx + a\int_0^1 v(x)u(x)\,dx = \int_0^1 v(x)f(x)\,dx, \quad \forall v \in V,$$

där V är mängden av alla kontinuerliga och styckvis deriverbara funktioner som uppfyller $v(0) = v(1) = 0$. (2p)

(b) Definiera finita-element-metoden (FEM) för variationsformuleringen genom att approximera V med kontinuerliga och styckvis linjära funktioner på ett likformigt nät. (2p)

(c) Skriv upp det linjära system som är associerat med FEM som du definierade i föregående uppgift. (2p)

(d) Hur förändras variationsformuleringen om $a = a(x)$, dvs om a är en funktion av x i stället för en konstant? (1p)

(e) Hur förändras det linjära ekvationssystemet om $a = a(x)$? (1p)