Kap 10 - Modeller med störningar

Notera att ”Beskrivning av signaler i frekvensdomänen -sammanfattning” ger en bakgrund till Kap 10 och 11.

Huvudpunkter:

- Hur beskriva slumpmässiga störningar?
- Data insamlas alltid i diskret tid. Men matematiska samband ofta i kontinuerlig tid (t ex differentialekvationer). Vilka samband finns?

Läsanvisningar:

- Kap 10.1 Läses
- Kap 10.2 Läs översiktligt, notera solhusexemplet!
- Kap 10.3 Deterministiska modeller -Läs översiktligt, Stokastiska modeller -Läses
- Kap 10.4 Läses (jmfr utdelat material)
- Kap 10.5 Läses översiktligt.

Kap 10.1 - Tidsdiskreta modeller

Viktigast i denna kurs: Insignal-utsignalform.

Vi kommer att normera samplingstiden ($T = 1$) i alla uttryck.

Kap 10.2 - Störningar i dynamiska system

Kända *mätbara* störningar, w. Ex. uppmätt solintensitet, se sid 222-223.

En störning som är mätbar kan i modellen ses som en ”vanlig” insignal.

Okända störningskällor: Ofta samlas den totala effekten ihop som ett additvit bidrag till utsignalen:

$$y(t) = z(t) + w(t)$$

där $z(t)$ är den ostörda (”brusfria”) utsignalen.

Huvudproblem; **Hitta lämplig beskrivning för** $w(t)$.

Stokastiska modeller och spektrum

Viktigt att få känsla för detta. Se sid 228-237 samt utdelat material.

10.5- Samband mellan kontinuerliga och diskreta modeller

Matlabfunktioner:

```
SYSD = C2D(SYSC,TS,METHOD) converts the
continuous-time LTI model SYSC to a
discrete-time model SYSD with sample time TS.

SYSC = D2C(SYSD,METHOD) produces a
continuous-time model SYSC that is equivalent
to the discrete-time LTI model SYSD.
```

Se vidare Kap 10.5 i kursboken

Kap 11 - Korrelation och spektralanalys

Systembeskrivningar (repetition)

- Antag linjärt system.
- Tidskontinuerliga system.

$$y(t) = \int_0^\infty g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

- Laplace-transform $L\{y(t)\} = Y(s)$ ger:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Systembeskrivningar

- Tidsdiskreta system (låter då t vara diskreta sampeltidpunkter). Differensekvationen

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \ ... \ + a_n y(t-n) =$$
$$b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + \ ... \ + b_n u(t-n)$$

Definiera bakåtskiftoperatorn q^{-1} enligt $q^{-1}y(t) = y(t-1)$. $\rightarrow$

$$\begin{aligned} y(t) &= G(q)u(t) \\ G(q) &= \frac{B(q)}{A(q)} = \frac{b_0 + b_1 q^{-1} + \ldots + b_n q^{-n}}{1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_n q^{-n}} \end{aligned}$$

Obs i många framställningar skrivs istället
$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_n q^{-n}$
Vi kan även skriva

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)u(t-k)$$

- Z-transform $Z\{y(t)\} = Y(q)$ ger:

$$Y(z) = G(z)Y(z)$$

Identifieringsprinciper

- Enkla experiment (steg och impulssvar). Se föreläsning 1.
- Black box identifiering (nyttjar ingen fysikalisk kunskap).
  a) Icke parametrisk identifiering (impulssvar, frekvensfunktion).
  b) Parametrisk identifiering.
- Grey box identifiering (nyttjar delvis fysikalisk kunskap).

Korrelationsanalys (11.1)

Betrakta ett tidsdiskret system

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k u(t-k) + w(t)$$

Korskovarians mellan $u(t)$ och $y(t)$:

$$R_{yu}(\tau) = Ey(t)u(t-\tau)$$

Antag $w(t)$ och $u(t)$ oberoende (i.e. $R_{uv}(\tau) = 0$) och u(t) vitt brus med varians λ:

$$R_{yu}(\tau) = \lambda g_\tau$$

- Skatta korskovariansfunktionen som enligt:

$$\hat{R}_{yu}^N(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} y(t)u(t-\tau)$$

- Skattning av impulssvaret:

$$\hat{g}_\tau^N = \frac{1}{\lambda}\hat{R}_{yu}^N(\tau)$$

- Enkelt, snabb info om tidsfördröjningar och tidskonstanter.
- Oprecis information (tabell/kurva).
- Om $u(t)$ ej vitt brus. Förfiltrera signalerna (se boken).
- Matlabkommando (SI-toolbox): `cra`.

Fourieranalys (11.2) - läs översiktligt

Metoden som beskrivs i 11.2 motsvarar metoden i Kap 11.4 (vilket nämns på sid 266).

Skattning av signalspektra (11.3-11.4)

Två alternativ:

- Använd beloppet i kvadrat av den diskreta fouriertransformen. Kallas periodogram.
- Använd samband mellan kovariansfunktion och spektrum. Grundide: Skatta kovariansfunktionen och sätt in i uttrycket för spektrum. Kallas Blackman-Tukeys metod.

Både metoderna kräver lite ”trix” för att ge vettiga skattningar!

Skattning av signalspektra (Kap 11.3)

Teori:

$$R_w(\tau) = E\{w(t+\tau)w(t)\} \tag{1}$$

Effektspektrum ges av

$$\Phi(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_w(k)e^{-i\omega k} \tag{2}$$

Men vi måste skatta $R_w(\tau)$ från ett ändligt antal data.
Princip:

$$\hat{R}_w(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-\tau} w(t+\tau)w(t) \tag{3}$$

- Fladdrigheten i spektrumskattningen (hög varians) kan minskas på bekostnad av dess upplösning.
- Blackman-Tukeys metod (Glättade periodogram): Medelvärdesbilda periodogramet över ett antal närliggande frekvenser. Kan även tolkas som en filterering av kovariansskattningen.
- Läs sid 256-264 !

(Om periodogram används kan Welchs metod användas:
Dela upp data i ett antal intervall, beräkna periodogrammet i varje intervall och medelvärdesbilda.)

Blackman-Tukeys metod:

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_N(\omega) &= \sum_{k=-M}^{M} w_M(k)\hat{R}_u^N(k)e^{-i\omega k} \\ \hat{R}_u^N(k) &= \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} u(t+k)u(t)\end{aligned}$$

Val av M (kallas γ i LB) bestämmer avvägningen mellan frekvensupplösning och brusighet. (Riktmärke: M=N/10):

- Lättar att särskilja två närliggande frekvenstoppar om M stor
- $\mathrm{Var}\hat{\Phi}_v^N(\omega) \sim 0.7\frac{M}{N}\Phi_v^2(\omega)$

- ## Kap 11.4 Skattning av överföringsfunktionen

  – Antag linjärt system samt att $u(t)$ och $v(t)$ oberoende:

  $$y(t) = G(p)u(t) + v(t)$$

  – M.h.a. tidigare resultat för korsspektra kan överföringsfunktionen skattas enligt:

  $$\hat{G}_N(i\omega) = \frac{\hat{\Phi}_{yu}^N(\omega)}{\hat{\Phi}_u^N(\omega)}$$

  – Störningen spektrum kan också skattas (se ekv (11.36))

- Matlab: `spa`
- Sammanfattning:
  - Mycket använd metod. Talanalys, mekaniska system, geofysik...
  - Antar endast linjärt system.
  - Fönsterbredden M måste anpassas.
  - Antar u och v okorrelerade - Gäller ej för återkopplade system! - Bra att använda som komplement till parametriska metoder.