TENTAMEN i kursen Empirisk modellering

Tid: Onsdag 24 oktober kl 14-19, 2012, **Plats:** Polacksbacken

Ansvarig lärare: Bengt Carlsson 070-6274590, 018-4713119
Bengt kommer och besvarar ev. frågor ca kl 16.30.

Tillåtna hjälpmedel (som får innehålla normala inläsningsanteckningar men inte lösningar till räkneuppgifter):

- Kursboken Modellbygge och Simulering.
- Texten "Linear regression" av Bengt Carlsson
- Miniräknare och matematisk formelsamling.

Gamla tentor och övningsmaterial är **INTE** tillåtna hjälpmedel.

Du får referera till resultat från litteraturen ovan. Om komplicerade kovariansuttryck behöver användas ges dessa som ledning.

Preliminär godkändgräns: G: $\geq$ 18p. Maxpoäng 35p. (Godkänd leder till höjning av betyget med en betygsenhet givet att projektet är godkänt.)

Lösningarna ska vara tydliga. Skriv kod på varje ark. Notera försättsbladet som är bifogat tentan.

LYCKA TILL

Bengt Carlsson

1a) Ange två orsaker som kan göra att parametrarna i en modell inte kan skattas entydigt.(2p)

b) Varför krävs i allmänhet mera räknearbete (i datorn) för att skatta parametrarna i en ARMAX-modell jämfört med en ARX-modell även då lika många parametrar skattas? (2p)

c) Ange en "bra" insignal om man vill skatta ett systems statiska förstärkning. (2p)

d) Ange två skäl till att det kan vara intressant att även skatta ett systems bodediagram med spektralanalys när man skattar parametriska modeller (typ ARX, ARMAX). (2p)

e) Effektutvecklingen P i ett motstånd med resistansen R kan skrivas

$$P(t) = Ri^2(t)$$

där i är strömstyrkan. Ta fram en lämplig *regressionsmodell* för att kunna skatta R från mätningar av P och i. (2p)

(Kommentar: P ger också ledningsförlusten i en ledning med resistansen R. Ledningsförlusten minskar med ökad spänning eftersom det då krävs mindre ström för att överföra samma effekt. Det är en anledning att man använder höga spänningar i kraftnäten!)

2p) Ett system är givet av

$$y(t) = a_o u(t) + e(t) \qquad t = 1, 2, ...N$$

där $Ee(t) = m \neq 0$. För insignalen u gäller att $\sum_{t=1}^{N} u(t) \neq 0$.

a) Parametern a skattas med minstakvadratmetoden givet prediktorn $\hat{y}(t) = au(t)$ och N st mätningar av y och u. Visa att minstakvadratskattningen $\hat{a}$ ej är en väntevärdesriktig skattning av a_o (dvs biasfel). (4p)

b) Ta fram en modifierad modellstruktur som ger en väntevärdesriktig minstakvadratskattning av a_o.
(2p)

3) Bestäm för vilket system följande prediktor är optimal

$$\hat{y}(t) = (M(q) - 1)\epsilon(t) + (1 - P(q))y(t)$$

där $\epsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t)$, $M(q) = 1 + m_1 q^{-1} + ... + m_{nm} q^{-nm}$, $P(q) = 1 + p_1 q^{-1} + ... + p_{np} q^{-np}$ (beteckningar för polynomen är inte de som normalt används). Vad kallas systemet (processen)? (4p)

4) Ett system är givet av

$$y(t) = K_o u(t) + e(t)$$

där $e(t)$ är vitt brus med medelvärde noll och varians σ_e. Insignalen $u(t)$ är vitt brus med medelvärde noll och varians σ_u. Insignalen kunde tyvärr inte mätas exakt utan den signal som kunde mätas var

$$u_m(t) = u(t) + v(t)$$

där $v(t)$ är vitt brus med medelvärde noll och varians σ_v. Alla brusen är okorrelerade med varandra. Följande prediktor användes:

$$\hat{y}(t) = K u_m(t)$$

Betrakta minstakvadratskattningen av K för fallet att antal data går mot oändligheten. Visa att det blir ett biasfel och bestäm storleken av detta. (5p)

Ledning: Följande matlabexempel kan kanske vara till viss hjälp:

```
>> N=10000;
>> v=randn(N,1); %Vitt mätbrus på insignalen
>> u=randn(N,1); %Insignal (omätbar!)
>> um=u+v; %Bruspåverkad mätsignal
>> e=randn(N,1); %Utsignalens mätbrus
>> %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
>> th0=10; y=th0*u+e; %Datagenerering
>> %%%%%%%%%%%%%%%%%%%
>> th=(1/(um'*um))*um'*y  %LS skattning givet mätningar av u och um
th =    4.9912
>> %%%%%%%%%%%%
>> WHY=1/(1+var(v)/var(u))
WHY =0.5013
```

5) Betrakta en (stabil) AR(2) process:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) = e(t)$$

där $e(t)$ är vitt brus med varians $Ee(t)^2 = \lambda$. Parametrarna skattades med minstakvatratmetoden. Antalet mätdata N är stort (dvs asymptotiska variansberäkningar kan användas).
Visa att variansen för $\hat{a}_1$ och $\hat{a}_2$ endast beror av antalet data N och polradien $r = \sqrt{a_2}$. (5p)

Ledning: Följande uttryck för kovariansfunktionen för $y(t)$ kan vara användbara:

$$\begin{aligned} R_y(0) &= \frac{\lambda(1+a_2)}{((1+a_2)^2 - a_1^2)(1-a_2)} \\ R_y(1) &= -\frac{\lambda a_1}{((1+a_2)^2 - a_1^2)(1-a_2)} \end{aligned}$$

6) Ett system beskrivs av

$$y(t) = 0.8u(t-1) + 0.4u(t-2) + e(t)$$

där $e(t)$ är vitt brus med varians λ. Insignalen (mätbar) ges av

$$u(t) = w(t) + w(t-1)$$

där $w(t)$ är vitt brus med varians 0.5.

Parametrarna i följande prediktionsmodell skattades med minstakvadratmetoden

$$\hat{y}(t) = bu(t-k)$$

Bestäm vad skattningen av b konvergerar mot då antalet mätdata går mot oändligheten. Undersök fallen $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$, och $k > 3$. (5p)

Lösningar

1)

a) Dålig excitation av insignalen eller "felaktig parametrisering" se även LB sid 301

b) Skattning av ARMAX modellen kräver iterativ sökning efter minimum på förlustfunktionen (till skillnad från ARX som kan lösas analytiskt).

c) En signal med konstant amplitud (signalen bör domineras av låga frekvenser.)

d) För att få en känsla för modellordningen och som ett (av flera) hjälpmedel att validera modeller.

e)

$$P(t) = \varphi^T(t)\theta$$

där $\varphi(t) = i^2(t)$ och $\theta = R$.

2)

$$\begin{aligned}
\hat{\theta} &= [\sum_{t=1}^{N} \varphi(t)\varphi^T(t)]^{-1} \sum_{t=1}^{N} \varphi(t)y(t)) = [\sum_{t=1}^{N} u^2(t)]^{-1} \sum_{t=1}^{N} u(t)y(t)) \\
&= \frac{\sum_{t=1}^{N} u(t)[a_o u(t) + e(t)])}{\sum_{t=1}^{N} u^2(t)} = a_o + \frac{\sum_{t=1}^{N} u(t)e(t)}{\sum_{t=1}^{N} u^2(t)}
\end{aligned}$$

Alltså är

$$E\hat{\theta} = a_o + m\frac{\sum_{t=1}^{N} u(t)}{\sum_{t=1}^{N} u^2(t)} \tag{1}$$

och vi får ett biasfel eftersom det antogs i uppgiften att $\sum_{t=1}^{N} u(t) \neq 0$.

3) Enkla räkningar ger

$$\hat{y}(t) = (1 - \frac{P(q)}{M(q)})y(t)$$

vilket är den optimala prediktorn för en ARMA process (se sid 283-284 i LB)

4) Allmänt gäller:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{N}[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(t)]^{-1}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)y(t))$$

Då $N \to \infty$ fås

$$\hat{\theta}_\infty = (\bar{R})^{-1}E\{\varphi(t)y(t)\}$$

där $\bar{R} = E\{\varphi(t)\varphi^T(t)\}$.

I uppg är $\varphi(t) = u_m(t)$ vilket ger

$$\begin{aligned}\hat{K}_\infty &= \frac{E\{u_m(t)y(t)\}}{E\{u_m^2(t)\}} = \frac{E\{u_m(t)[K_o u(t) + e(t)]\}}{E\{u_m^2(t)\}} = \frac{E\{[u(t)+v(t)][K_o u(t) + e(t)]\}}{E\{(u(t)+v(t))^2\}} \\ &= K_o\frac{\sigma_u}{\sigma_v + \sigma_u}\end{aligned}$$

Vi får alltså följande biasfel

$$E\{K_o - \hat{K}_\infty\} = K_o\frac{\sigma_v}{\sigma_v + \sigma_u}$$

Om $\sigma_v = 0$, dvs vi kan mäta insignalen exakt blir biasfelet (inte oväntat) noll. Problemet där inte $\varphi-vektorn$ kan mätas exakt kallas ”errors in variables ” se

`en.wikipedia.org/wiki/Errors-in-variables_models`

5) Vi har

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(\hat{\theta}) &= \lambda[\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(t)]^{-1} = \frac{\lambda}{N}[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(t)]^{-1} \to_{N\to\infty} \frac{\lambda}{N}[[E\{\varphi(t)\varphi^T(t)\}]^{-1} \\ &= \frac{\lambda}{N}(\bar{R})^{-1}\end{aligned}$$

Med $\varphi(t) = (-y(t-1) \quad -y(t-2))^T$ erhålls

$$\bar{R} = E\{\varphi(t)\varphi^T(t)\} = \begin{bmatrix} R_y(0) & R_y(1) \\ R_y(1) & R_y(0)\end{bmatrix}$$

Alltså

$$\mathrm{var}(\hat{a}_1) = \mathrm{var}(\hat{a}_2) = \frac{\lambda}{N}\ \frac{R_u(0)}{R_u^2(0) - R_u^2(1)} = \frac{1}{N}(1 - a_2^2) = \frac{1}{N}(1 - r^4)$$

(den näst sista liketen följer efter insättning av uttrycken för kovariansfunktionen och förenklingar).

6) Från lösningen till uppg 4:

$$\hat{\theta}_\infty = (\bar{R})^{-1} E\{\varphi(t)y(t)\}$$

där $\bar{R} = E\{\varphi(t)\varphi^T(t)\}$. Vi behöver räkna ut $R_u(k)$, $k = 0$ ger:

$$R_u(0) = E\{(w(t-k) - w(t-k-1))^2\} = 0.5 + 0.5 = 1$$

Analogt fås $R_u(1) = 0.5$ samt $R_u(k) = 0$, $k > 1$.

Vi kan nu räkna ut $\bar{R} = E\{\varphi(t)\varphi^T(t)\} = R_u(0) = 1$ samt

$$E\{\varphi(t)y(t)\} = E\{u(t-k)[0.8u(t-1)+0.4u(t-2)+e(t)]\} = 0.8R_u(k-1)+0.4R_u(k-2)$$

För $k = 1$ fås $\hat{b}_\infty = 0.8 + 0.4 \times 0.5 = 1$,
$k = 2$ ger $\hat{b}_\infty = 0.8$,
$k = 3$ ger $\hat{b}_\infty = 0.2$ samt
$k > 3$ ger $\hat{b}_\infty = 0$