ARX-modellen

$$\begin{aligned} y(t) &+ a_1y(t-1)+a_2y(t-2)+\ldots a_{na}y(t-na) \\ &= b_1u(t-nk)+\ldots+b_{nb}u(t-nk-nb+1)+e(t) \end{aligned}$$

där $e(t)$ är vitt brus. Kan skrivas:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t)$$

eller

$$A(q)y(t) = q^{-nk}\tilde{B}(q)u(t) + e(t)$$

ARX-**prediktorn** fås genom att flytta över allt utom $y(t)$ till HL och stryka $(e(t)$:

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &= -a_1y(t-1)-\ldots-a_{na}y(t-na) \\ &+ b_1u(t-nk)+\ldots+b_{nb}u(t-nk-nb+1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= (-y(t-1) \;\; \ldots - y(t-na) \\ &\quad u(t-nk)\ldots u(t-nk-nb+1))^T \\ \theta &= (a_1 \;\; \ldots a_{na} \;\; b_1 \;\; \ldots b_{nb})^T \end{aligned}$$

Minstakvadratskattningen

Givet mätdata $\{y(t), \varphi(t)\}_{t=1,\dots,N}$ så minimeras förlustfunktionen:

$$V(\theta) = \sum_{t=1}^{N} (y(t) - \varphi^T(t)\theta)^2$$

av:

$$\hat{\theta} = [\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(t)]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)y(t))$$

Notera normering med N (påverkar ej $\hat{\theta}$)

Specialfall

- AR-modell: Sätt nb=0. Kan användas för att skatta en enkel tidsseriemodell
- FIR modell: Sätt na=0.
- Enkelt att utvidga ARX-modellen till flera insignaler.

Matlab

```
>> my_theta_est=arx(data,modellordning)
```

där data är vektorer av insignalen och utsignalen. Modellordning är na, nb, nk. Detaljer: se *help arx*

Analys

Antag att data kommer från följande "sanna" system

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta_o + v(t) \quad t = 1, \ldots, N \tag{1}$$

där $v(t)$ är en störning ("mätbrus"). Vi får då

$$\begin{aligned}
\hat{\theta} &= [\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(t)]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)[\varphi^T(t)\theta_o + v(t)] \\
&= \theta_o + [\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(t)]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)v(t))
\end{aligned}$$

Antag $N \to \infty$:

$$\hat{\theta}_\infty = \theta_o + [E\varphi(t)\varphi^T(t)]^{-1}E\varphi(t)v(t))$$

$\hat{\theta}_\infty = \theta_o$ om

- $E\varphi(t)\varphi^T(t)$ är inverterbar
- $E\varphi(t)v(t)) = 0$

Det sista vilkoret är bara uppfyllt för ARX modellen om $v(t)$ är vitt brus. Om bruset är färgat fås ett biasfel i skattningen trots att man använder oändligt mycket data!

Kommentar

För att ARX-modellen ska kunna skattas utan biasfel måste data komma från ett system på formen

$$A_o(q)y(t) = B_o(q)u(t) + v(t)$$

där $v(t)$ är vitt brus. Trots detta restriktiva villkor är förmodligen ARX-modellen den mest använda modellstrukturen för att skatta dynamiska modeller. Huvudanledning: TSTF (Try Simple Things First).

Det kan dock ibland finnas anledning att använda en annan modell är ARX...