

Beskrivning av signaler i frekvensdomänen - sammanfattning

Bengt Carlsson
Systems and Control
Dept of Information Technology, Uppsala University

September 10, 2013

Abstract

Detta material ger en sammanfattning av Kap 10 och 11 i kursboken och beskriver hur frekvensinnehållet i en signal kan beskrivas. Tonvikten här ges på de viktigaste formlerna/sambanden.

Contents

1	Fouriertransformen för tidskontinuerliga signaler	3
2	Fouriertransformen för tidsdiskreta deterministiska signaler	3
3	Kovariansfunktioner	4
4	Effektspektrum för stokastiska signaler	4
4.1	Korsspekta	5
5	Two important relationships	6
5.1	Bevis av (22)*	7
5.2	Bevis av (23)*	7
6	ARMA processen	8
7	Estimation of spectra and transfer functions	8
7.1	Spektralestimeringar	8
7.2	Estimation of the transfer function with spectral analysis	10

1 Fouriertransformen för tidskontinuerliga signaler

Givet en tidskontinuerlig signal $x(t)$ med ändlig energi (integralen av signalens belopp existerar) definieras (detta görs t ex i kursen Fouriermetoder) fouriertransformen enligt

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1)$$

Spektrum för signalen $x(t)$ definieras som

$$\Phi(\omega) = |X(\omega)|^2 \quad (2)$$

Spektrum anger hur mycket av en viss frekvens som signalen innehåller. Speciellt anger $\int_{\omega_1}^{\omega_2} \Phi(\omega) d\omega$ hur mycket av signalens energi som finns mellan frekvenserna ω_1 och ω_2 . Att fouriertransformen kan tolkas som signalens frekvensinnehåll följer av Parsevals formel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) d\omega \quad (3)$$

2 Fouriertransformen för tidsdiskreta deterministiska signaler

Antag att $x(t)$ är en tidsdiskret signal (vi låter nu $t = 1, 2, \dots$) med ändlig energi (summan av signalens absolutbelopp existerar). Normalt härstammar den tidsdiskreta signalen från sampling av en tidskontinuerlig signal (vi normerar här samplingsintervallet till $T = 1$, se Appendix C2 i kursboken för allmänt T). Den tidsdiskreta fouriertransformen (DFT) ges av

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-i\omega k} \quad (4)$$

Spektrum definieras analogt med det tidskontinuerliga fallet som

$$\Phi(\omega) = |X(\omega)|^2 \quad (5)$$

och Parsevals formel ges av

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x^2(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\omega) d\omega \quad (6)$$

Om signalen har oändlig energi görs en normering av tidsintervallets längd (vilket gör att spektrum då får enhet effekt per frekvens). Om vi låter $x(k) = 0$, $k \leq 0$ erhålls

$$\Phi(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left| \sum_{k=1}^N x(k)e^{-i\omega k} \right|^2 \quad (7)$$

3 Kovariansfunktioner

För en tidsdiskret stokastisk stationär¹ process $x(t)$ med medelvärde $E\{x(t)\} = 0$ ges *kovariansfunktionen* av

$$R_x(\tau) = E\{x(t + \tau)x(t)\} \quad \tau = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Löst uttryckt anger kovariansfunktionen hur lik signalen är sig själv τ tidssteg bort. Om $x(t)$ är vitt brus är $R_x(\tau) = 0$ $\tau \neq 0$ dvs signalen är *okorrelerad*. Notera också att $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$.

Följande samband är centralt:

$$R_x(0) = E\{x^2(t)\} \quad (9)$$

dvs signalens varians ges av kovariansfunktionens värde i origo!

Det är "lätt" att skatta kovariansfunktioner från mätdata. I princip ersätts väntevärdet med medelvärdesbildning ("sampelmedelvärde"). Från data $x(1), x(2) \dots x(N)$ kan kovariansfunktionen skattas² genom

$$\hat{R}_x(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-\tau} x(t + \tau)x(t) \quad (10)$$

Tillämpningar av detta finns i Kap 11 i läroboken.

Ett mått på hur två signaler $x(t)$ och $v(t)$ samvarierar ges av *korskorrelationen*

$$R_{xv}(\tau) = E\{x(t + \tau)v(t)\} \quad (11)$$

som kan skattas givet två dataserier:

$$\hat{R}_{xv}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-\tau} x(t + \tau)v(t) \quad (12)$$

4 Effektspektrum för stokastiska signaler

Antag att $x(t)$ är en tidsdiskret stokastisk stationär process med medelvärde 0 och kovariansfunktion

$$R_x(\tau) = E\{x(t + \tau)x(t)\} \quad (13)$$

Signalens (effekt-) spektrum ges av

$$\Phi(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-i\omega\tau} \quad (14)$$

¹En process är stationär om processens statistiska egenskaper inte förändras över tiden

²Man kan tycka att egentligen borde man dividera med $N - \tau$ istället för N . Dock blir skattningen ofta bättre om divisionen görs med N . Motiv till detta utelämnas i denna text men finns t ex i boken "Spectral Analysis of Signals" by P Stoica and R Moses.

Notera att för vitt brus där variansen betecknas λ så är $\Phi(\omega) = \lambda$, dvs alla frekvenser har samma effektinnehåll (jämför analogin med vitt ljus!).

Parsevals formel ges av

$$E\{x^2(k)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(\omega) d\omega \quad (15)$$

dvs signalens medeleffekt ges av integralen av effektspektrat!

Att definitionen ovan är vettig följer också av att

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\left\{ \frac{1}{N} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-i\omega k} \right|^2 \right\} \quad (16)$$

konvergerar mot den definitionen av spektrum som ges i (14). Beviset finns i Appendix C5 i kursboken. Notera att (16) är väntevärdet av motsvarande definition för en deterministisk signal, se (7).

Skattningar av spektrum beskrivs översiktligt i avsnitt 6 nedan, se också Läroboken Kap 11.3-11.4

4.1 Korsspektra

Korsspektra mellan två signaler $x(t)$ och $v(t)$ ges av

$$\Phi_{xv}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{xv}(\tau) e^{-i\omega\tau} \quad (17)$$

Korsspektra beskriver vilka frekvenskomponenter som är gemensamma för de två signalerna, se även (23) för ett viktigt samband.

5 Två viktiga samband

Antag att vi har ett tidsdiskret system (samplingstid normerad till $T = 1$) med (tidsdiskret) överföringsfunktion

$$y(t) = G(q)u(t) \quad (18)$$

där

$$G(q) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)q^{-k} \quad (19)$$

Notera att systemets *frekvensfunktion* erhålls då man ersätter q (eller z i $G(z)$) med $e^{i\omega}$ dvs³

$$G(e^{i\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)e^{-i\omega k} \quad (20)$$

Vi kan skriva utsignalen som

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)u(t-k) \quad (21)$$

Antag att u har kovariansfunktion $R_u(\tau)$ och spektrum $\Phi_u(\omega)$.

Då gäller

$$\Phi_y(\omega) = |G(e^{i\omega})|^2\Phi_u(\omega) \quad (22)$$

$$\Phi_{yu}(\omega) = G(e^{i\omega})\Phi_u(\omega) \quad (23)$$

Notera att om vi kan skatta spektrum så kan vi också skatta systemets överföringsfunktion! Se vidare kapitel 11.4 i läroboken samt avsnitt 7.2 nedan

³Om insignalen är $u(t) = \sin(\omega t)$, $t = 1, 2, 3, \dots$ blir utsignalen (då alla transienter dött ut) en sinussignal med samma frekvens och amplitud $|G(e^{i\omega})|$. Fasvridningen blir $\arg G(e^{i\omega})$. Jämför med det tidskontinuerliga fallet!

5.1 Bevis av (22)*

Vi har att

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= E\{y(t+\tau)y(t)\} = E\left\{\sum_{j=0}^{\infty} g(j)u(t+\tau-j) \sum_{k=0}^{\infty} g(k)u(t-k)\right\} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g(j)g(k)R_u(\tau-j+k) \end{aligned}$$

Utsignalens spektrum ges av

$$\Phi_y(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_y(\tau)e^{-i\tau\omega} \quad (24)$$

Vi får alltså

$$\Phi_y(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g(j)g(k)R_u(\tau-j+k)e^{-i\tau\omega} \quad (25)$$

$$= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g(j)e^{-ij\omega} R_u(\tau-j+k)e^{-i(\tau-j+k)\omega} g(k)e^{ik\omega} \quad (26)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} g(j)e^{-ij\omega} \sum_{k=0}^{\infty} g(k)e^{ik\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_u(n)e^{-in\omega} \quad (27)$$

$$= G(e^{i\omega})G(e^{-i\omega})\Phi_u(\omega) = |G(e^{i\omega})|^2\Phi_u(\omega) \quad (28)$$

5.2 Bevis av (23)*

Vi har

$$R_{yu}(\tau) = E\{y(t+\tau)u(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)E\{u(t+\tau-k)u(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)R_u(\tau-k)$$

Korsspektrum blir

$$\Phi_{yu}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{yu}(\tau)e^{-i\tau\omega} = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g(k)R_u(\tau-k)e^{-i\tau\omega} \quad (29)$$

$$= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g(k)e^{ik\omega} R_u(\tau-k)e^{-i(\tau-k)\omega} \quad (30)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} g(k)e^{-ik\omega} R_u(n)e^{-in\omega} \quad (31)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} g(k)e^{-ik\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_u(n)e^{-in\omega} = G(e^{i\omega})\Phi_u(\omega) \quad (32)$$

6 ARMA processen

Standardmodellen för att beskriva en stokastisk process i tidsdomänen är den så kallade ARMA (AutoRegressive Moving Average) processen. Denna består av en linjär differensekvation som matas med vitt brus:

$$x(t) + d_1x(t-1) + \dots + d_nx(t-n) = c_0e(t) + c_1e(t-1) + \dots + c_n e(t-n) \quad (33)$$

Vi kan sätta $c_0 = 1$ utan inskränkning (denna faktor kan ingå i brustermen). I en del framställningar skrivs $x(t-mT)$ eller $x(t_{k-m})$ istället för $x(t-m)$. Oftast är $e(t)$ normalfördelat med medelvärde 0 och varians λ .

Notera att spektrum för ARMA processen kan beräknas genom att ta fram överföringsfunktionen för processen, $G_{ARMA}(q)$ och sedan beräkna

$$\Phi_x(\omega) = |G_{ARMA}(e^{i\omega})|^2 \lambda \quad (34)$$

Flera viktiga specialfall finns av ARMA processen, t ex⁴ **AR processen**:

$$x(t) + d_1x(t-1) + \dots + d_nx(t-n) = e(t) \quad (35)$$

I kapitel 12 i Läroboken visas hur parametrarna i en ARMA process kan skattas från en tidsserie och i projektet kommer du själv att få skatta en AR modell av en tidsserie från uppmätta vindhastigheter och sedan studera vindens spektrala egenskaper! I den toolbox som används kan detta göra med några få knapptryckningar (eller genom att använda två funktionsanrop)

7 Skattning av spektra och överföringsfunktioner

Mera detaljer till detta avsnitt finns i läroboken kapitel 11.2-11.3

7.1 Spektralskattningar

Givet en tidsserie $x(t)$, $t = 1, 2, \dots, N$ kan dess spektrum $\Phi(\omega)$ skattas. Det finns två grundprinciper:

1. En skattning av spektrum baserat på (16) kallas ofta *periodogram* och ser i grundutförande ut som

$$\hat{\Phi}(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=1}^N x(k) e^{-i\omega k} \right|^2 \quad (36)$$

I Matlab kan detta göras med kommandot *ETFE*.

2. Man kan även skatta spektrum från (14). Först skattas kovariansfunktionen från (10), denna skattning sätts sedan in i (14) vilket ger ("korrelogrammet"):

$$\hat{\Phi}(\omega) = \sum_{\tau=-N}^N \hat{R}_x(\tau) e^{-i\omega\tau} \quad (37)$$

Se kommandot *spa* i Matlab.

⁴En MA-process erhålls om $d_i = 0$ $i = 1, 2, \dots, n$.

Utan modifieringar ger dessa skattningar ger ett väldigt "fladdrigt" spektrum, därför används i praktiken modifieringar av ovanstående skattningar. I princip är det en smaksak vilken av grundmetoderna som används, vi tar här bara upp skattningar baserat på den andra metoden.

Figur 1 visar problemet med fladdrigheten i spektralskattningen. I figuren har data från en tidsserie $x(t)$ skattats med (37). $N = 1000$ datapunkter har använts. I exemplet är $x(t)$ vitt brus med varians 1. Vi vet då att det teoretiska spektrumet för x är $\Phi(\omega) = 1$ dvs det sanna spektrat har värdet 1 för alla frekvenser (upp till π).

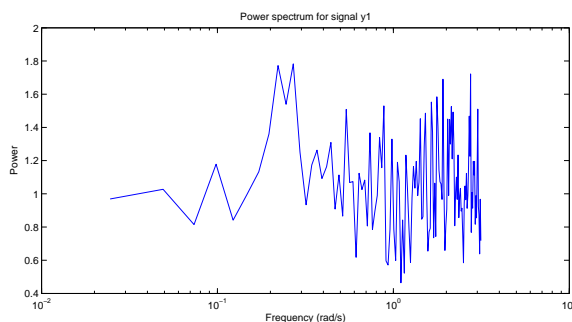


Figure 1: Skattning av spektra med (37), det sanna spektrumet för signalen är 1 för alla frekvenser.

Som syns i figuren blir skattningen av spektrat en ganska fladdrig historia, man ser dock att medelvärdet av skattningen ligger nära 1. En bättre skattning av spektrumet borde kunna fås genom att försöka jämna ut fladdrigheten! Det finns flera sätt att göra detta på, ett sätt presenteras nedan.

Metoden som kallas *Blackman-Tukey* bygger på att man medelvärdesbildar skattningen över ett antal frekvenser. Man kan visa att detta kan åstadkommas genom att använda en fönsterfunktion i skattningen (37) enligt

$$\hat{\Phi}(\omega) = \sum_{\tau=-M}^M X_M(\tau) \hat{R}_x(\tau) e^{-i\omega\tau} \quad (38)$$

Funktionen X_M bestäms av användarvalet M (heltal $< N$) som bestämmer hur många skattningar av $\hat{R}_x(k)$ som används i beräkningen av spektrumet. Med fönsterfunktionen görs summeringen i (38) från $-M$ till M istället för som i (37) där summeringen går från $-N$ till N . Formen på fönsterfunktionen väljs normalt inte rektangulärt utan fönstret viktas $\hat{R}_x(k)$ högre för $|k|$ liten än för $|k|$ nära M . Den exakta formen på fönstret visas i läroboken (se sid 262).

Notera att i läroboken kallas fönstret ω_γ , där γ är användarvalet. I Matlab (System Identification Toolbox) betecknas användarvalet M vilket är skälet till att denna beteckning har använts i denna framställning.

Genom att införa funktionen X_M i spektralskattningen (se (38)) kan vi få en "mjukare" skattning av spektrumet. Figur 2 visar skattningen av spektrumet

med samma data som i figur 1 fast då (38) används med $M = 20$. Som syns i figuren blir skattningen betydligt jämnare (pga den medelvärdesbildning som fönsterfunktionen åstadkommer),

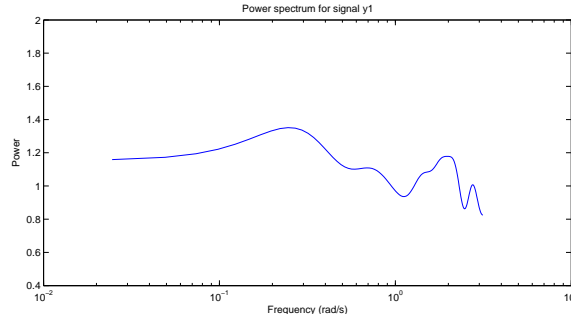


Figure 2: Skattning av spektrum med (38) med $M = 20$, det sanna spektrumet för signalen är 1 för alla frekvenser.

Ju lägre värde på M som väljs detso jämnare blir skattningen av spektrum. Dock kommer verkliga toppar i spektrumet att smetas ut då M minskas, detta betyder att möjligheten att kunna urskilja två närliggande resonanstoppar i spektrat minskar med minskande M . I praktiken får man pröva olika värden på M och välja det värde som verkar ge bäst skattning.

I funktionen *spa* i Matlab kan fönstbredd M väljas. Om inget M anges används defaultvärdet $M = \min(N/10, 30)$.

7.2 Skattning av överföringsfunktionen med spektralanalys

Från (23) ser vi att systemets överföringsfunktion kan fås från sambandet:

$$G(e^{i\omega}) = \frac{\Phi_{yu}(\omega)}{\Phi_u(\omega)} \quad (39)$$

Genom att skatta dessa spektrum kan vi alltså erhålla en skattning av systemets överföringsfunktion. Spektrum kan skattas enligt (38) (för skattningen av $\Phi_{yu}(\omega)$ modifieras (38) genom att används (12)). Valet av M görs enligt disussionen ovan. Skattningen av överföringsfunktionen kan göras i Matlab med kommandot *spa*. Se även avsnitt 11.4 i läroboken.