TENTAMEN i kursen
Empirisk modellering

Tid: Onsdag 21 oktober kl 8-13, 2013, **Plats:** Polacksbacken

Ansvarig lärare: Bengt Carlsson 070-6274590, 018-4713119
Bengt kommer och besvarar ev. frågor ca kl 10.45.

Tillåtna hjälpmedel (som får innehålla normala inläsningsanteckningar men inte lösningar till räkneuppgifter):

- Kursboken Modellbygge och Simulering.
- Texten "Linear regression" av Bengt Carlsson
- Miniräknare och matematisk formelsamling.

Gamla tentor och övningsmaterial är **INTE** tillåtna hjälpmedel.

Du får referera till resultat från litteraturen ovan. Om komplicerade kovariansuttryck behöver användas ges dessa som ledning.

Preliminär godkändgräns: G: $\geq$ 18p. Maxpoäng 35p. (Godkänd leder till höjning av betyget med en betygsenhet givet att projektet är godkänt.)

Lösningarna ska vara tydliga. Skriv kod på varje ark. Notera försättsbladet som är bifogat tentan.

LYCKA TILL

Bengt Carlsson

Uppgift 1 Besvara nedanstående frågor kortfattad, 1p för varje korrekt svar.

(a) Ta fram överföringsfunktionen för följande differensekvation:

$$y(t) + 0.5y(t-1) = 5u(t-2) + 2u(t-3)$$

(2p)

(b) Vad måste gälla för polerna för ett tidsdiskret system för att det ska vara stabilt? **(1p)**

(c) Vid skattning av parametrar talar man om två olika typer av fel. Vilka? **(1p)**

(d) När man ska skatta spektrum från mätdata måste man göra en avvägning. Beskriv kort denna avvägning. **(1p)**

(e) Ange en identifieringsmetod som kan vara lämplig för att uppskatta ett systems tidsfördröjning. **(2p)**

(f) Antag att vi har ett linjärt tidsdiskret system beskrivet av

$$y_n(t) = G(q|\theta)u(t)$$

Den utsignal som mäts är påverkad av mätbrus

$$y(t) = y_n(t) + v(t)$$

där bruset $v(t)$ har medelvärde noll (och är okorrelerat med insignalen u). Man vet också att brusets spektrum (spektraltäthet) $\Phi_v(\omega)$ är konstant för alla frekvenser. Ange och motivera en lämplig modelstruktur (namnet på den) för att skatta parametrar i $G(q|\theta)$. **(2p)**

Uppgift 2 Betrakta systemet

$$y(t) = e(t) + 2e(t-1)$$

där $e(t)$ är vitt brus med medelvärde 0 och varians λ. Bestäm spektrum för signalen $y(t)$. **(3p)**

Uppgift 3
(a) Bestäm den optimala en-stegsprediktion för systemet:

$$y(t) = b_1 u(t-1) + e(t) + c_1 e(t-1)$$

där $|c_1| < 1$ och $e(t)$ är vitt brus med medelvärde 0. **(3p)**
(b) Studera prediktorn, varför är det viktigt att $|c_1| < 1$? **(2p)**

Uppgift 4 Ett system är givet av

$$y(t) = b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + e(t)$$

där $e(t)$ är vitt brus med medelvärde 0 och varians λ. Insignalen $u(t)$ är också (ett annat) vitt brus med medelvärde 0 och varians 1. $u(t)$ och $e(t)$ är okorrelerade.
(a) Bestäm $R_{yu}(k) = Ey(t)u(t-k)$ för $k = 0, 1, 2....$ **(4p)**
(b) Hur kan resultatet ovan används för att skatta en modell av systemet givet mätningar av $y(t)$ och $u(t)$? **(2p)**

Uppgift 5 Ett signal består av en konstant c_o påverkad av en störning w:

$$y(t) = c_o + w(t) \qquad t = 1, 2, ...N$$

där $E[w(t)] = 0$, $E[w(t)^2] = 2$, $E[w(t)w(t-1)] = -1$ och $E[w(t)w(t-\tau)] = 0,\ \tau > 1$. Antalet mätdata är N.

(a) Visa att minsta-kvadratskattningen av c_o är väntevärdesriktig. **(3p)**

(b) Bestäm, uttryckt i N, variansen för minsta-kvadratskattningen av c_o. **(4p)**

Uppgift 6 Betrakta följande prediktor för att skatta parametern K:

$$\hat{y}(t) = Ku(t-1)$$

Data genereras av (det stabila) systemet

$$y(t) = \sum_{k=1}^{N_k} h_k u(t-k) + e(t)$$

där ordningstalet $N_k > 0$, $e(t)$ är vitt brus, okorrelerat med $u(t)$. Bruset har medelvärde 0 och varians λ. Insignalen $u(t)$ är en konstant A.

Bestäm det asymptotiska värdet (antalet data N går mot oändligheten) för minstakvadratskattningen av K. Vilken systemegenskap skattas med K? **(6p)**

Lösningar

Uppgift 1

(a)

$$G(q) = \frac{5q^{-2} + 2q^{-2}}{1 + 0.5q^{-1}}$$

(b) Alla poler innanför enhetscirkeln

(c) Bias- och variansfel

(d) Låg "fladdrighet" *vs* hög frekvensupplösning

(e) Korrelationsanalys (eller stegsvar)

(f) OE

Uppgift 2

$$G(e^{i\omega}) = \lambda(5 + 4\cos\omega)$$

Uppgift 3 (a)

$$(1 + c_1 q^{-1})\hat{y}(t) = c_1 q^{-1} y(t) + b_1 q^{-1} u(t)$$

(b) För att prediktorn ska bli stabil

Uppgift 4 (a) $R_{yu}(0) = 0$, $R_{yu}(1) = b_1$, $R_{yu}(2) = b_2$, och för $k > 2$ fås $R_{yu}(k) = 0$.

(b) Korrelationsanalys (se LB Kap 11.1)

Uppgift 5 (a)

$$\begin{aligned}
\hat{c_o} &= [\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(t)]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} z(t)y(t) \\
&= [\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(t)]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)(\varphi^T(t)c_o + w(t)) \\
&= c_o + [\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)\varphi^T(t)]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\varphi(t)w(t)
\end{aligned}$$

Detta ger att ($\varphi(t) = 1$ är okorrelerad med $w(t)$)

$$E\hat{c_o} = 0$$

eftersom $Ew(t) = 0$.

(b)

$$\text{cov}(\hat{\theta}) = \text{var}(\hat{c_o}) = \frac{2}{N^2}$$

Se uppgift 2b, Kap 1 räkneuppgifter för bevis.

Uppgift 6 Då antalet data $N \to \infty$ gäller

$$\hat{\theta}_\infty = (\bar{R})^{-1} E\{\varphi(t)y(t)\}$$

där $\bar{R} = E\{\varphi(t)\varphi^T(t)\}$. I vårat fall är $\varphi(t) = u(t-1) = A$ vilket ger $\bar{R} = E\{\varphi(t)\varphi^T(t)\} = A^2$ samt

$$E\{\varphi(t)y(t)\} = E\{u(t-1)y(t)\} = E\{u(t-1)\sum_{k=1}^{N_k} h_k u(t-k) + e(t)\} = A^2 \sum_{k=1}^{N_k} h_k$$

vilket ger

$$\hat{\theta}_\infty = \sum_{k=1}^{N_k} h_k$$

som svarar mot systemets statiska förstärkning.