TENTAMEN i kursen
Empirisk modellering

Tid: Måndag 20 oktober kl 8-13, 2014, **Plats:** Fyrislundsgatan 80

Ansvarig lärare: Bengt Carlsson 070-6274590, 018-4713119
Bengt kommer och besvarar ev. frågor ca kl 10.30.

Tillåtna hjälpmedel (som får innehålla normala inläsningsanteckningar men inte lösningar till räkneuppgifter):

- Kursboken Modellbygge och Simulering.
- Texten “Linear regression” av Bengt Carlsson
- Miniräknare och matematisk formelsamling.

Gamla tentor och övningsmaterial är **INTE** tillåtna hjälpmedel.

Du får referera till resultat från litteraturen ovan. Om komplicerade kovariansuttryck behöver användas ges dessa som ledning.

Preliminär godkändgräns: G: $\geq$ 18p. Maxpoäng 35p. (Godkänd leder till höjning av betyget med en betygsenhet givet att projektet är godkänt.)

Lösningarna ska vara tydliga. Skriv kod på varje ark. Notera försättsbladet som är bifogat tentan.

LYCKA TILL

Bengt Carlsson

Uppgift 1 Besvara nedanstående frågor kortfattad

(a) Beskriv ett sätt att utvidga en ARX modell om det system som ska skattas (även) påverkas av en konstant störning så att $u = 0$ inte ger $y = 0$ (i stationaritet). **(2p)**

(b) Antag att du bara har programvara för att lösa linjära ekvationssystem. Vilken/vilka av följande modelltyper kan du använda för att skatta modeller(motivera kort):

- ARX-modell
- OE-modell
- AR-modell

(2p)

(c) Undersök (gärna med ett enkelt exempel) om någon av OE-modellen eller ARX modellen kan ha en stabil prediktor som ger en instabil modell. **(3p)**

Uppgift 2 En stokastisk signal $y(t)$ har följande spektrum:

$$\Phi(\omega) = 1 + \cos(w)$$

bestäm signalens kovariansfunktion. **(3p)**

Uppgift 3 Betrakta följande system

$$y(t) = c + e(t)$$

Mätbruset $e(t)$ är oberoende, har medelvärde 0 och varians $\lambda(t)$. Två mätningar av $y(t)$ görs ($y(1)$ och $y(2)$) där variansen av bruset är $\lambda(1) = 1$ och $\lambda(2) = 100$.

(a) Vad blir minstakvadratskattningen av c (uttryckt i $y(1)$ och $y(2)$) och vilken varians har skattningen? **(3p)**

(b) Givet att brusvarianserna är kända, ta fram en noggrannare skattning än i uppg a. Bestäm också skattningens varians. **(4p)**

Uppgift 4 Ett system är givet av

$$y(t) = b_1 u(t) + b_2 u(t-1) + e(t)$$

där $e(t)$ är vitt brus med medelvärde 0 och varians λ. Betrakta följande fyra experiment:

1. $u(1) = 10$, $u(2) = -10$, $u(3) = 10$, $u(4) = -10$.
2. $u(1) = 0$, $u(2) = 2$, $u(3) = 0$, $u(4) = 0$.
3. $u(1) = 100$, $u(2) = 0$, $u(3) = 0$, $u(4) = 0$.
4. $u(1) = 1$, $u(2) = 1$, $u(3) = -1$, $u(4) = -1$.

Avgör vilket experiment som kan förväntas ge den noggrannaste minstakvadratskattningen av parametrarna (b_1, b_2). Finns det något/några experiment som är direkt olämpligt att använda? I alla experimenten kan det antas att brusets varians (λ) är densamma. Värdet på $u(0)$ är okänd och kan inte användas i skattningen. **(6p)**

Uppgift 5 Betrakta följande system

$$y(t) = b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + e(t)$$

där $e(t)$ är vitt brus med medelvärde noll, varians λ, och okorrelerad med insignalen u. Insignalen är vitt brus med medelvärde noll och varians δ_u.

(a) Bestäm varianserna, då antalet data går mot oändligheten för minstakvadratskattningen av parametrarna b_1 och b_2. **(2p)**

(b) Antag att det är känt att parametrarna är identiska (dvs $b_1 = b_2 = b$). Ta fram en prediktor som utnyttjar kunskapen att bara en parameter behövs skattas och visa att minstakvadratskattningen har lägre varians än i fallet (a) ovan. **(4p)**

Uppgift 6 Betrakta följande system

$$y(t) = b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + \ \ldots \ + b_n u(t-n) + e(t)$$

där $e(t)$ är vitt brus med medelvärde 0, varians $E[e(t)^2] = \lambda$ och okorrelerad med u. Insignalen $u(t) = A\sin(\omega t)$ $(0 < \omega < \pi,\ A > 0)$ med kovariansfunktion $R_u(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau)$. Parametrarna ska skattas med minstakvadratmetoden. Visa att systemet är identifierbart (dvs att parametrarna kan bestämmas entydigt då antalet data går mot oändligheten) för $n = 2$ men *inte* för $n = 3$.

Ledning: Följande trigonometriska samband kan vara användbart
$\cos(2\omega) = 2\cos^2(\omega) - 1$ **(6p)**