

## **Kap 4 - Tidsdiskreta LTI system**

## Räkneregler för Z-transformen

- För en sekvens av tal  $y(0), y(1), y(2), \dots$  definieras Z-transformen som

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k}$$

- Superposition. Helt analogt med det tidskontinuerliga fallet (Laplacetransformen).
- Tidsskift.

$$\mathcal{Z}[(y(k - n))] = z^{-n}Y(z)$$

- Summering.

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^{\infty} y(k)\right] = \frac{z}{z-1}Y(z)$$

- *Slutvärdesteoremet.*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1^-} (z-1)Y(z)$$

Gäller om  $y(k)$  konvergerar mot ett konstant värde.

- (Begynnelsevärdesteoremet)

## Överföringsfunktion

Ett allmänt kausalt tidsdiskret LTI system kan skrivas som

$$y(k) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)u(k-n)$$

Vanliga namn på  $h(n)$  är impulssvar, pulssvar och viktsfunktion. Z-transformering ger

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n}U(z)$$

vilket ger överföringsfunktionen

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

## Överföringsfunktion för en differensekvation

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n)$$

Tidsskiftning av båda leden  $n$  tidssteg framåt

$$y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_n y(k) = b_0 u(k+n) + b_1 u(k+n-1) + \dots + b_n u(k)$$

z-transformering (antar systemet i vila vid  $t = 0$ )

$$(z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n) Y(z) = (b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n) U(z)$$

Överföringsfunktionen ges av  $U(z)$  enligt

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

Se ex 4.1!

Avsnitt 4.1.1 =överkurs

## Statisk förstärkning

Antag att insignalen är en konstant sekvens med värdet  $u_0$  (Z-transform  $U(z) = \frac{z}{z-1}$ ) och att (stabilt system!) utsignalen svänger in mot en konstant nivå  $y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(k)$ . Den statiska förstärkningen definieras som

$$K = \frac{y(\infty)}{u_0} \quad (1)$$

Slutvärdesteoremet ger

$$y(\infty) == \lim_{z \rightarrow 1^-} (z - 1)Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1^-} (z - 1)H(z) \frac{u_0 z}{z - 1} = H(1)u_0 \quad (2)$$

$\Rightarrow$

$$K = \frac{y(\infty)}{u_0} = H(1) \quad (3)$$

Läs avsnitt 4.1.3 själva

#### 4.1.4, Poler, nollställen och stabilitet

Antag ett tidsdiskret LTI-system med  
överföringsfunktionen

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \dots + b_{n-1}}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}$$

Systemets *poler* ges av rötterna till

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

Systemets nollställena ges av rötterna till

$$b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \dots + b_{n-1} = 0$$

Stabilitetsvillkor:

*Ett system är insignal-utsignalstabil om alla systemets poler ligger strikt innanför enhetscirkeln i det komplexa talplanet (det vill säga alla poler har belopp mindre än 1).*

Notera att i kursen Stokastisk modellering användes inte z-transformen utan istället skrevs nämnarpolynomet som

$$1 + a_1 \tilde{z} + \dots + a_n \tilde{z}^n = 0$$

vilket gör att stabilitet kräver att alla nollställen till detta polynom ska vara utanför enhetscirkeln

Det är lätt (Övn. uppgift 4.5) att visa följande resultat:

Ett system är insignal-utsignalstabilt om viktfunktionen  $h(k)$  uppfyller

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

#### 4.1.5 Samband mellan polläge och respons

Exempel:

$$y(k+1) = \gamma y(k) + (1 - \gamma)u(k)$$

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{1 - \gamma}{z - \gamma}U(z)$$

Systemet har en pol i  $z = \gamma$ .

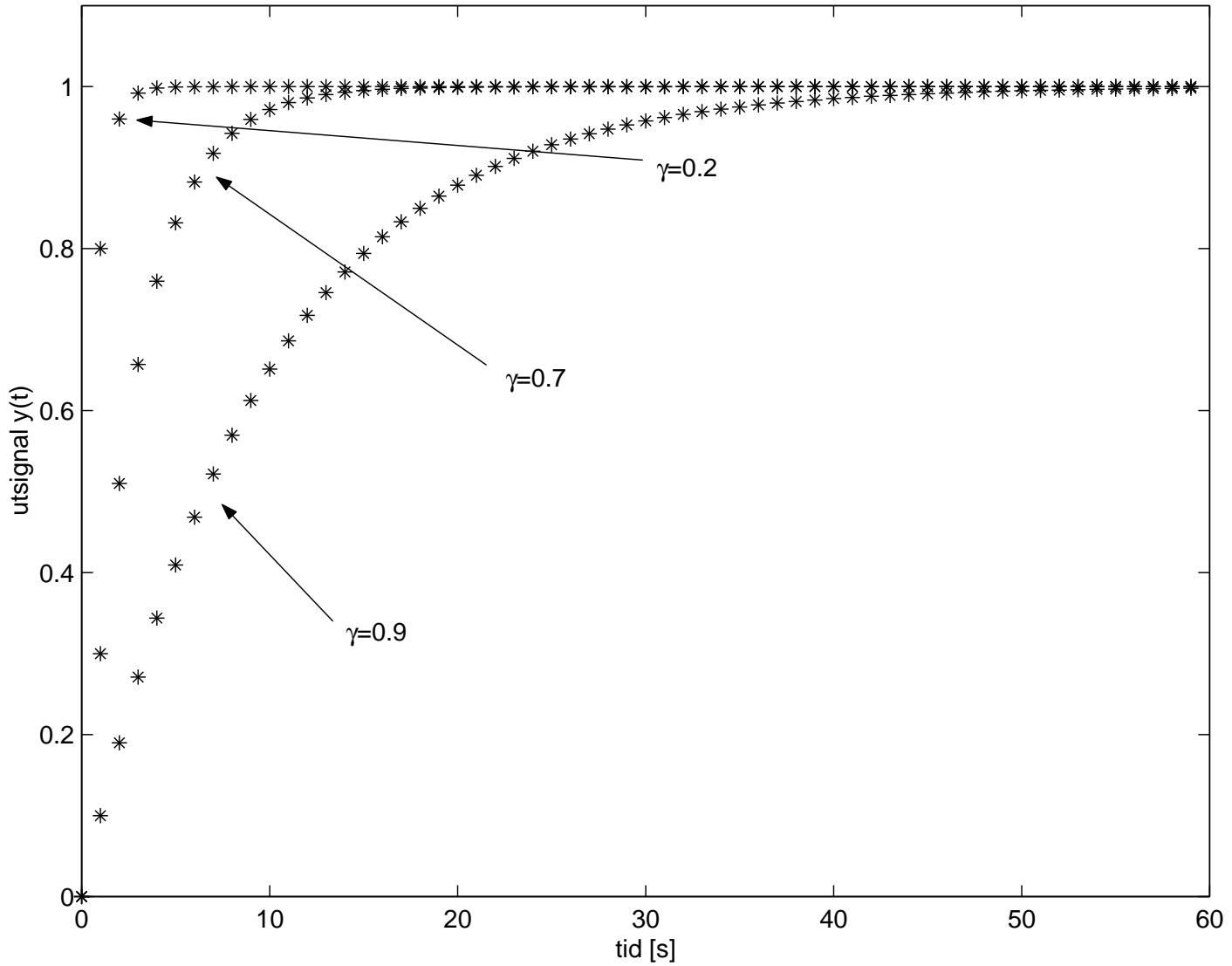


Figure 1: Stegsvar för det tidsdiskreta systemet  $\frac{1-\gamma}{z-\gamma}$  för några värden på  $\gamma$

- Ett tidsdiskret system blir snabbare ju närmare origo polerna ligger.
- Pss som för tidskontinuerliga system, får tidsdiskreta system oscillationer om polerna är komplexa. Osillationerna ökar ju närmare enhetscirkeln polerna är.

## 4.2 Frekvensbeskrivning

Låt

$$u(k) = \sin(\omega k)$$

Då blir (efter lång tid)

$$y(k) = |H(e^{i\omega})| \sin(\omega k + \arg(H(e^{i\omega})))$$

Ersätt alltså  $z$  med  $e^{i\omega}$  i  $H(z)$ .

Se ex 4.4!

## 4.3 Digitala filter

Vid behandling av en tidsdiskret signal (i en dator) vill man ofta att vissa frekvenser i en signal ska förstärkas eller dämpas. Exempel:

- Den intressanta signalen har obetydlig energi över frekvensen  $\omega_1$  [rad/s]. Störningarna och brus har högre frekvenser.
- Mätningarna störs av en signal med frekvensen  $\omega_2$  [rad/s] (det kan t ex vara störningar från nätfrekvensen).
- För att kontrollera att inga resonanser uppkommer behöver frekvensen frekvensen  $\omega_3$  [rad/s] övervakas.

1. Lågpassfilter. Låga frekvenser i signalen ska passera och höga frekvenskomponenter ska spärras.
2. Högpassfilter. Höga frekvenser i signalen ska passera och låga frekvenser ska spärras.
3. Bandpassfilter. Signalens frekvenser inom ett visst frekvensområde ska passera medan övriga ska spärras.
4. Bandspärrfilter. Frekvenser inom ett visst frekvensområde ska spärras.

För att designa digitala filter finns bra datorstöd. En standardmetod i Matlab är funktionen *butter* som tar fram filterkoefficienter för ett s.k. ”Butterworthfilter”.