

Kap 6 - Tillståndsmodeller för LTI system

- Kap 6.1 - Tidskontinuerliga LTI system
- Kap 6.2 - Tidsdiskreta LTI system

6.1.1 Tillståndsbeskrivning $m < n$ ($m = n$ överkurs)

Allmänna linjär (tidsinvariant) differentialekvation

$$\begin{aligned} & \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) \\ &= b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_m u(t) \end{aligned}$$

där vi antar att $m < n$ kan skrivas som en tillståndsmodell

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

där A är en $n \times n$ matris, B är en $n \times 1$ kolonnvektor och C är en $1 \times n$ radvektor. Vektorn

$x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ kallas *tillståndsvektor* och de enskilda variabler $x_1, x_2, \dots x_n$ som ingår i den kallas *tillståndsvariabler*.

Ofta skrivs x istället för $x(t)$.

Varför tillståndsbeskrivning?

- Ofta naturligt resultat vid fysikalisk modellering
(jmfr t ex Bioreaktorn)
- Standardform för att numeriskt lösa
diff.ekvationer (Kap 6.2.4)
- Naturlig beskrivning för olinjära system (Kap 7)
- Används för att designa effektiva regulatorer
(Reglerteknik I)
- Lätt att utvidga för fallet med flera insignaler
och/eller flera utsignaler (görs i Reglerteknik II)

Sid 74-75, System utan nollställen

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = bu \quad (1)$$

Sätt $x_1 = y$, $x_2 = \frac{dy}{dt}$, $x_n = \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}$ och därigenom erhålla att $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_{n-1} = x_n$. Uttrycket för derivatan av den sista tillståndsvariabeln \dot{x}_n fås sedan genom substitution i (1) som

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - \dots - a_1 x_n + bu$$

och man får på standardformen

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & \dots & \dots & \dots & \dots & -a_1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \ 0 \ \dots \ \dots \ \dots \ 0)x$$

Ex 6.3 - Diagonalform, (Krav: rent reella poler)

Vi tar som ett numeriskt exempel ett system med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{4s^2 + 16s + 14}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Nämnaren kan skrivas som $(s + 1)(s + 2)(s + 3)$ och partialbråksuppdelning ger

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

Om vi nu inför (ej entydigt!) tillståndsvariabler enligt

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1} U(s), \rightarrow \dot{x}_1 = -x_1 + u$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+2} U(s), \rightarrow \dot{x}_2 = -2x_2 + u$$

$$X_3(s) = \frac{1}{s+3} U(s), \rightarrow \dot{x}_3 = -3x_3 + u$$

och har därmed att

$$y = x_1 + 2x_2 + x_3$$

Sammanfattar man systemet på tillståndsform kan man alltså skriva

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} x\end{aligned}$$

6.1.4 Ex på allmän tillståndsbeskrivning

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

Detta system kan beskrivas på tillståndsform

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ -a_{n-1} & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} x$$

6.1.5 - Att gå från tillståndsrepresentation till $G(s)$

Överföringsfunktionen för systemet

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

är

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

Systemets poler är lika med egenvärdena till matrisen A .

6.2 - Tillståndsbeskr för tidsdiskreta LTI-system

En linjär differensekvation

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = \quad (2)$$

$$b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n) \quad (3)$$

kan skrivas som en tillståndsmodell

$$x(k+1) = Fx(k) + Gu(k) \quad (4)$$

$$y(k) = H_d x(k) \quad (5)$$

Notera standardformen ekvation (6.21)-(6.22) och likheten med det tidskontinuerliga fallet (\dot{x} byts mot $x(k+1)$).

Överföringsfunktionen för ett tidsdiskret system givet på tillståndsform ges av

$$H(z) = H_d(zI - F)^{-1}G \quad (6)$$

Systemets poler är lika med egenvärdena till matrisen F .