

## Kap 8 - Empirisk modellering

Två grundprinciper för att bygga matematiska modeller (kombineras ofta!):

- Fysikaliskt modellbygge. Använd naturlagar (massbalans, energibalans, Newtons lagar etc etc). Ibland behövs hypoteser och empiriska samband).
- Empirisk modellering (annat namn: Systemidentifiering) Ide': Utnyttja observationer (mätningar) från systemet för att anpassa en model.

### 8.1.1 Impuls- och stegsvar

- Impulssvar:  $u(t) = \delta(t) \Rightarrow y(t) = g(t)$
- Stegsvar:  $u(t) = u_0$  för  $t > 0 \Rightarrow y(t) = u_0 \int_0^t g(\tau) d\tau$
- + Snabb översikt över dynamiken. Tidsskala, orsak-verkan.
- – Oprecis information.
- – Känslig för störningar.

Viktigt att kunna: Bestämma  $K$  och  $T$  i systemet

$$G(s) = \frac{K}{s+T}$$
 från ett stegsvar.

## 8.1.2 Frekvensanalys

- Linjärt system entydigt bestämt av sitt frekvenssvar  $G(i\omega)$ .
- För ett linjärt kontinuerligt system gäller att (då transienten dött ut):

$$u(t) = u_0 \sin(\omega t) \Rightarrow y(t) = y_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

där

$$y_0 = |G(i\omega)|u_0$$

$$\varphi = \arg G(i\omega)$$

- $\Rightarrow$  Skatta frekvenssvaret genom att använda sinussignaler med olika frekvens som insignal och mäta utsignalen.

## Frekvensanalys - sammanfattning

- + Lätt att använda.
- + Enda antagandet är att systemet är linjärt.
- + Lätt att undersöka intressanta frekvensområden
- - Resulterar i tabell/graf.
- - Ej praktiskt genomförbart att analysera alla frekvenser. Långsamt.
- - Inte alltid ”tillåtet” att använda sinussignaler i en process.

### 8.1.3 Spektralanalys - översiktligt

För ett linjärt dynamiskt system gäller

$Y(s) = G(s)U(s)$ , ersätt  $s$  med  $i\omega$  ger följande samband mellan in- och utsignalernas fouriertransformer:

$$Y(i\omega) = G(i\omega)U(i\omega)$$

vilket ger

$$G(i\omega) = \frac{Y(i\omega)}{U(i\omega)}$$

Spektralanalys: Skatta signalernas fouriertransformer.  
Jämför projektet i transformteori!

I praktiken har vi endast tillgång till ett ändligt antal samplade värden av in- och utsignalen vilket gör den tidsdiskreta fourierserien (TDF) används

$$Y_{TDF}(i\omega) = \sum_{k=1}^N y(k)e^{-i\omega k}$$

$$U_{TDF}(i\omega) = \sum_{k=1}^N u(k)e^{-i\omega k}$$

Vi kan då forma skatningen

$$\hat{G}(i\omega) = \frac{Y_{TDF}(i\omega)}{U_{TDF}(i\omega)}$$

Avvägning måste göras mellan bruskänslighet ("fladdrighet") och frekvensupplösning (förmåga att särskilja två närliggande frekvenstoppar).

## Linjär regression

Modellstruktur:

$$\hat{y}(k) = \varphi^T(k)\theta \quad (1)$$

Ex FIR-modell:

$$\hat{y}(k) = b_o u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n)$$

$\Rightarrow$

$$\varphi(k) = (u(k) \ u(k-1) \dots u(k-n))^T$$

$$\theta = (b_o \ b_1 \dots b_n)^T$$

## ARX-modellen

$$\begin{aligned}y(k) &+ a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + \dots + a_{na}y(k-na) \\&= b_o u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_{nb} u(k-nb) + e(k)\end{aligned}$$

Prediktorn för ARX-modellen fås genom att flytta över allt utom  $y(k)$  till HL och stryka brustermen  $e(k)$  dvs

$$\begin{aligned}\hat{y}(k) &= -a_1y(k-1) - \dots - a_{na}y(k-na) \\&\quad + b_o u(k) + \dots + b_{nb} u(k-nb)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\varphi(k) &= (-y(k-1) \ \dots \ -y(k-na) \ u(k) \ \dots u(k-nb))^T \\ \theta &= (a_1 \ \dots a_{na} \ b_o \ \dots b_{nb})^T\end{aligned}$$

## AR-modellen

En modell för en stokastisk tidsserie kan enkelt fås genom att sätta  $u = 0$  i ARX prediktorn. Detta ger (AR-prediktorn):

$$\hat{y}(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) - \dots - a_{na} y(k-na)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\varphi(k) &= (-y(k-1) - y(k-2) \dots - y(k-na))^T \\ \theta &= (a_1 \ a_2 \dots a_{na})^T\end{aligned}$$

En utvidgning av AR-modellen är ARMA-modellen som vi dock inte tar upp i denna översikt.

## Minstakvadratmetoden

Antag uppmätt dataserie  $\{y(k), \varphi(k)\}_{k=1,\dots,N}$ .

Kriterium:

$$V(\theta) = \sum_{k=1}^N (y(k) - \hat{y}(k))^2 = \sum_{k=1}^N (y(k) - \varphi^T(k)\theta)^2 \quad (2)$$

Det  $\theta$  som minimerar (2) ges av:

$$\hat{\theta} = [\sum_{k=1}^N \varphi(k)\varphi^T(k)]^{-1} \sum_{k=1}^N \varphi(k)y(k) \quad (3)$$

OBS, matrisen  $[\sum_{k=1}^N \varphi(k)\varphi^T(k)]^{-1}$  måste kunna inverteras!

Kan även normera med  $N$ :

$$\hat{\theta} = [\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)\varphi^T(k)]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k)y(k))$$

## Minstakvadratmetoden - matrisformulering

Inför

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}$$
$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \vdots \\ \varphi^T(N) \end{bmatrix}$$

Minstakvadratlösningen kan skrivas

$$\hat{\theta} = [\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T Y \quad (4)$$

## Analys (8.4)- översiktligt

### Antagande A1.

Data kommer från ett system givet av:

$$y(k) = \varphi^T(k)\theta_o + e(k) \quad k = 1, \dots, N \quad (5)$$

där  $e(k)$  är en omätbar störning (se nedan). I matrisform får vi

$$Y = \Phi\theta_o + \mathbf{e} \quad (6)$$

med  $\mathbf{e} = [e(1) \dots e(N)]^T$ .

## **Antagande A2.**

Störningen ("bruset")  $e(k)$  antas vara vitt brus dvs  
 $E\{e(k)\} = 0$ ,  $E\{e^2(k)\} = \lambda$  (variansen), och  
 $E\{e(k)e(j)\} = 0$  då  $k$  och  $j$  är olika.

## **Antagande A3.**

Vi antar att  $E\{\varphi(k)e(s)\} = 0$  för alla  $k$  och  $s$ . Gäller  
för FIR-modeller men ej för ARX/AR-modeller.

Då gäller

$$1. \quad E\{\hat{\theta}\} = \theta_o.$$

2.

$$P = \text{cov } \hat{\theta} = E\{(\hat{\theta} - E\hat{\theta})(\hat{\theta} - E\hat{\theta})^T\} = \lambda(\Phi^T \Phi)^{-1}$$

3. Brusvariansen  $\lambda$  kan skatts medelvärdesriktigt.

- A1 innebär att systemet som genererat data den skattade modellen har samma struktur.
- För den skattade parametern  $\hat{\theta}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) gäller att var  $\hat{\theta}(i) = P(i, i)$ . Variansfelet för de skattade parametrarna fås alltså från diagonalelementen i  $P$ .
- Kovariansmatrisen  $P$  kan skattas från mätdata.
- Om bruset  $e$  har en Gaussisk fördelning kommer även  $\hat{\theta}$  att var Gaussisk

### Asymptotisk noggrannhet (8.4.3)

Om vi låter antalet data gå mot oändligheten kan vi ersätta summering med väntevärde:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X(k) \rightarrow E\{X(k)\} \text{ då } N \rightarrow \infty \quad (7)$$

Underlättar ofta analysen!

## Val av modellstruktur och modellordning (8.5)

Praktiskt mkt viktigt!

1. Använd fysikalisk insikt dvs utnyttja eventuell kunskap om systemet för att få ledtråd om modellstrukturen.
2. Pröva olika modellstrukturer/modellordning och välj den modell som "bäst" kan beskriva datasetet.  
Olika statistiska tester finns!

Korsvaldering (mkt bra!)

Utvärdera de olika modellerna för en ny datuserie som *inte* används för kalibrering. Välj den modell som ger det lägsta (minstakvadrat-) felet på det "färsk" datasetet