UPPSALA UNIVERSITET

Programkonstruktion

Moment 4
Om rekursion

Summera *godtyckligt* antal tal

```
(* sumUpTo n
   Type: int->int
   Pre: n >= 0, n <= 7
   Post: Summan av talen från 0 till n
   Ex.: sumUpTo 4 = 10
        sumUpTo 0 = 0
*)
fun sumUpTo 0 = 0
  | sumUpTo 1 = 0+1
  | sumUpTo 2 = 0+1+2
  | sumUpTo 3 = 0+1+2+3
  | sumUpTo 4 = 0+1+2+3+4
  | sumUpTo 5 = 0+1+2+3+4+5
  | sumUpTo 6 = 0+1+2+3+4+5+6
  | sumUpTo 7 = 0+1+2+3+4+5+6+7
```

n>7, då?? Detta är uppenbarligen ingen framkomlig väg...

Analys av summeringsproblemet

- För att summera talen från 0 till n kan jag lösa det *enklare* problemet att summera från 0 till n-1 och sedan lägga till n!
- Om n=0 kan jag direkt säga att summan är 0.

Exempel: summera talen från 0 till 4.

- Ett enklare problem är att summera från 0 till 3.
- Summan av det enklare problemet blir 6?
- Lägg till 4. Nu har vi 6+4=10 vilket är summan av talen från 0 till 4.

Hur fick jag tag på summan av talen från 0 till 3? På samma sätt!

- Ett enklare problem är att summera från 0 till 2.
- Summan av det enklare problemet blir 3?
- Lägg till 3. Nu har vi 3+3=6 vilket är summan av talen från 0 till 3.

Etcetera…

Fullständigt resonemang för summeringen

Summera talen från 0 till 4.

- Ett enklare problem är att summera från 0 till 3.
- •• Ett enklare problem är att summera från 0 till 2.
- ••• Ett enklare problem är att summera från 0 till 1.
- •••• Ett enklare problem är att summera från 0 till 0.
- ••••• Summan är 0!
- •••• Summan är 0+1 = 1.
- ••• Summan är 1+2 = 3.
- •• Summan är 3+3 = 6.
- • Summan är 6+4=10.

Denna metod kallas *rekursion*.
(Från latinets *recurso* – att återvända.)

Rekursion i ML

```
(* sumUpTo n
   Type: int->int
   Pre: n >= 0
   Post: Summan av talen från 0 till n
   Ex.: sumUpTo 4 = 10
        sumUpTo 0 = 0 *)
fun sumUpTo(0) = 0
  | sumUpTo(n) = sumUpTo(n-1)+ n
```

Basfall — Rekursivt anrop

```
sumUpTo 4
—> sumUpTo(4-1)+4
—> sumUpTo(3)+4
```

……här beräknas summan av talen från 0 till 3……

```
—> 6+4
—> 10
```


Den fullständiga beräkningen

```
fun sumUpTo(0) = 0
  | sumUpTo(n) = sumUpTo(n-1)+ n
```

Basfall — Rekursivt anrop

```
sumUpTo 4
—> sumUpTo(4-1)+4
—> sumUpTo(3)+4
—> (sumUpTo(3-1)+3)+4
—> (sumUpTo(2)+3)+4
—> ((sumUpTo(2-1)+2)+3)+4
—> ((sumUpTo(1)+2)+3)+4
—> (((sumUpTo(1-1)+1)+2)+3)+4
—> (((sumUpTo(0)+1)+2)+3)+4
—> (((0+1)+2)+3)+4
—> ((1+2)+3)+4
—> (3+3)+4
—> 6+4
—> 10
```

Hur skall man förstå detta?

```
fun sumUpTo 0 = 0
  | sumUpTo n =
      sumUpTo(n-1) + n
```

Rekursion är en variant av principen att dela upp problemet i enklare delar och sedan sätta ihop resultatet av delarna.
En rekursiv funktion anropar sig själv, men problemet är ändå enklare eftersom argumenten är ”mindre” (precis vad detta betyder återkommer vi till). När det rekursiva anropet är klart sätter man ihop resultatet (additionen i exemplet).
Varje rekursivt anrop är som en ”rysk docka”.

Bindningar i rekursion

```
fun sumUpTo 0 = 0
  | sumUpTo n = sumUpTo(n-1) + n
sumUpTo 2
--> sumUpTo(n-1)+n                [n-->2]
--> sumUpTo(2-1)+n                [n-->2]
--> sumUpTo 1 +n                  [n-->2]
--> (sumUpTo(n-1)+n [n-->1])+n    [n-->2]
--> (sumUpTo(1-1)+n [n-->1])+n    [n-->2]
--> (sumUpTo 0 +n   [n-->1])+n    [n-->2]
--> (0+n [n-->1])+n               [n-->2]
--> (0+1 [n-->1])+n               [n-->2]
--> (1 [n-->1])+n                 [n-->2]
--> 1+n                           [n-->2]
--> 1+2                           [n-->2]
--> 3                             [n-->2]
--> 3
```


Eftervillkoret igen

En vanlig typ av fel är att skriva eftervillkoret för `sumUpTo` så här:

~~`Post: Summan av sumUpTo på n-1, plus n.`~~

Detta är i princip en översättning av koden till klartext som beskriver *hur* `sumUpTo` arbetar, inte *vad* den beräknar.

Tänk på att funktionsspecifikationen skall vara oberoende av programkoden!

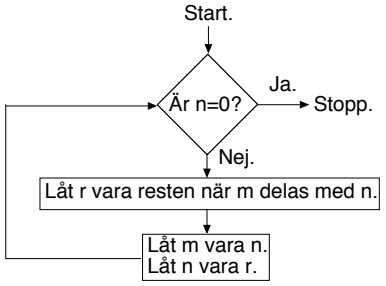
Rätt formulering är alltså:

```
Post: Summan av talen från 0 till n
```

(Ifrån en beskrivning av hur funktionen arbetar kan man förstås i princip förstå vad den beräknar, men ofta det kan vara mycket svårt att se.)

Exempel: Euklides algoritm

Största gemensamma delaren (gcd) till 126 och 168



m	n	r
126	168	
168		126
	126	
126		42
	42	
42		0
	0	

För att beräkna gcd för m och n, lös det *enklare problemet* att beräkna gcd för n och resten vid division av m med n!

gcd i ML

```
(* gcd(m,n)
   Type: int*int->int
   Pre: m,n>=0
   Post: Största gemensamma delaren till m och n
   Ex.: gcd(126,168) = 42 *)
fun gcd(m,0) = m
  | gcd(m,n) = gcd(n, m mod n)

gcd(126,168)
--> gcd(168,126 mod 168)
--> gcd(168,126)
--> gcd(126,168 mod 126)
--> gcd(126,42)
--> gcd(42,126 mod 42)
--> gcd(42,0)
--> 42
```


Terminering

Hur vet man att rekursionen någonsin avslutas (*terminerar*)?
Vad *innebär* det att den inte gör det?

Inte självklart att rekursionen terminerar... felaktiga argument:

```
sumUpTo ~1
--> sumUpTo(~1-1) + ~1
--> sumUpTo(~2) + ~1
--> (sumUpTo(~2-1) + ~2) + ~1
--> (sumUpTo(~3) + ~2) + ~1
--> .....
```

Förvillkoret måste utesluta sådana argument!

…eller en liten felskrivning:

```
fun sumUpTo(0) = 0
  | sumUpTo(n) = sumUpTo(n+1) + n
```

Rekursionsvarianter

Varje rekursivt anrop måste lösa ett *enklare* fall än det föregående. Ett tillräckligt enkelt fall måste kunna lösas *utan* rekursion.

Varje rekursivt anrop av `sumUpTo(n)` har ett *mindre* värde av `n` än det föregående. Fallet när `n`=0 (*basfallet*) hanteras utan rekursion. Samtidigt kan inte `n` bli mindre än 0.

En *rekursionsvariant* är ett heltalsuttryck sådant att:
- Det blir *mindre* för varje rekursivt anrop.
- Det *kan inte* bli mindre än något bestämt värde (normalt 0).
- För *detta* bestämda värde (och ev. andra) löses problemet utan rekursion.

Finns en rekursionsvariant är terminering garanterad.
Rekursionsvarianten är en del av programdokumentationen!

Konkret tolkning av varianten

Eftersom varianten minskar med 1 (minst!) för varje rekursivt anrop och inte kan bli mindre än 0 (typiskt) så ger varianten en *gräns* för hur många rekursiva anrop som behövs.

Är varianten 10 krävs *maximalt* 10 rekursiva anrop för att beräkna funktionen. Detta ger även ett tips om hur man kan hitta varianten.

(Detta gäller vid *enkel rekursion* som är den vanligaste formen.)

Det finns funktioner där man inte (eller inte med rimlig ansträngning) kan ge en gräns för antalet rekursiva anrop men som ändå säkert terminerar. Då får man använda andra tekniker, t.ex. *välgrundade ordningar*.

Vi kommer bara i undantagsfall att se sådana funktioner i denna kurs.

Rekursion och matematisk induktion

Det finns ett nära förhållande mellan rekursion och induktion.
Exempel: *Bevisa* att en rekursionsvariant garanterar terminering!

Låt T(n) betyda att ett anrop av funktionen med argument som har variantvärdet n terminerar.

Fullständig induktion över n (naturligt tal, ok ty varianten är inte < 0)

- T(0) gäller direkt (*basfallet*).
- Vi vill visa att T(n) gäller.
  Vi vet (*induktionsantagande*) att T(n') för alla n'<n
  Alla rekursiva anrop som behövs för att beräkna funktionen har en variant n'<n, alltså terminerar de eftersom vi vet att T(n').
  Alltså kommer det givna anropet att terminera.

gcd terminerar

```
... Pre: m,n>=0 ...
fun gcd(m,0) = m
  | gcd(m,n) = gcd(n, m mod n)
```

`n` är en rekursionsvariant för `gcd`.

- `m mod n` är alltid (definitionsmässigt) mindre än `n`.
- `n` kan inte vara mindre än 0 (eftersom förvillkoret anger att n *från början* inte är mindre än 0 och `m mod n` inte *kan bli* mindre än 0).
- fallet `n`=0 hanteras utan rekursion.

Varianter på defensiv programmering

Alt. 1
```
fun sumUpTo n = if n < 0 then
                  raise Domain
                else
                  sumUpTo'(n)
fun sumUpTo'(0) = 0
  | sumUpTo'(n) = sumUpTo'(n-1) + n
```

Alt. 2
```
fun sumUpTo(0) = 0
  | sumUpTo(n) = if n < 0 then
                   raise Domain
                 else
                   sumUpTo(n-1) + n
```

Alt. 3
```
fun sumUpTo(n) =
      if n <= 0 then
        0
      else
         sumUpTo(n-1) + n
```
Påverkas förvillkoret i detta fall?

Exempel: räkna uppåt till basfallet

```
(* sumRange(i,n)
   Type: int*int->int
   Pre: n >= i-1
   Post: Summan av talen från i till n.
   Ex.: sumRange(0,4) = 10
        sumRange(2,4) = 9
        sumRange(5,4) = 0 *)
(* Variant: n-i+1 *)
fun sumRange(i,n) = if i>n then
                      0
                    else
                      sumRange(i+1,n)+i;

(* sumUpTo n
   Type: int->int
   Pre: n >= 0
   Post: Summan av talen från 0 till n
   Ex.: sumUpTo 4 = 10
        sumUpTo 0 = 0 *)
fun sumUpTo n = sumRange(0,n);
```

Undvik onödiga begränsningar

Varför förvillkor `n>=i-1`? Varför inte `n>=i` eller t.o.m. `n>i`? Varför någon alls?

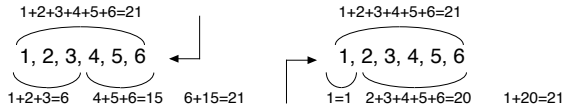
`sumRange(i,n)` summerar tal från `i` till `n`.
Antalet tal är `n-i+1`. Vad händer om antalet är 1, 0 eller –1?
Kan man tala om ”summan” av ett tal, noll tal, –1 tal?!?

Varför är basfallet i `sumRange` skrivet som det är?
`if i>n then 0…` varför inte `if i>=n then i…`
eller t.o.m. `if i>=n+1 then i+n…`

Man bör försöka hitta en naturlig tolkning av ”summa” som är så generell som möjligt utan att krångla till programmet. Då får man ett program som är flexibelt och kan användas i många situationer.

Tolkning av konstiga ”summor”

Summerar man två delar av en talserie och adderar delsummorna får man summan av hela talserien.



Låt nu en delserie innehålla *ett* tal. Regeln gäller fortfarande om man antar att summan av *ett* tal är talet självt.

Låt en delserie vara tom – dvs innehålla noll tal. Regeln gäller fortfarande om man antar att summan av *noll* tal är 0.

En talserie bestäms av sitt första och sista tal. En serie med noll tal får ett ”sista” tal (`n`) som är ett mindre än det ”första” talet (`i`). Därför bör `sumRange` kunna hantera alla fall där `n>=i-1`.

Exempel: räkna tecken

```
(* countChar(s,c)
   Type: string*char->int
   Pre: (ingen)
   Post: Antalet förekomster av c i s
   Ex.: countChar("Hej, du glade",#"d")=2
        countChar("Hej, du glade",#"q")=0
*)
(* Variant: size s *)
fun countChar("",_) = 0
  | countChar(s,c) =
      countChar(String.substring(s,1,size s -1),c)
      + (if String.sub(s,0)=c then
           1
         else
           0)
```


En annan ansats till teckenräkning

Vid rekursion över strängar är rekursionsargumentet en *delsträng*.

Delsträngen behöver inte konstrueras uttryckligen – istället kan den vara underförstådd (*implicit*) genom att använda en *position i strängen* som extra argument och göra rekursion över *positionen*.

Strängargumentet `s` ersätts av *två* argument `s` och `pos`.
`s` är den *ursprungliga* strängen, `pos` är positionen.

När man använder `s` får man skriva
`String.sub(s,pos)` istället för `String.sub(s,0)`
Det rekursiva anropet har
`s` och `pos+1` istället för `String.substring(s,1,size s-1)`

Denna teknik är viktig om det är komplicerat att konstruera uttrycket i det rekursiva anropet.

Exempel: räkna tecken på annat sätt

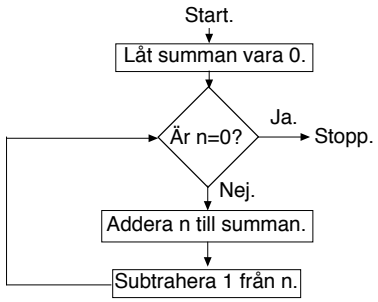
```
(* countChar2'(s,c,pos)
   Type: string*char*int->int
   Pre: 0<=pos<=size s
   Post: Antalet förekomster av c i s
         från och med position pos.
   Ex.: countChar2'("Hej, du glade",#"d",3)=2
        countChar2'("Hej, du glade",#"d",13)=0 *)
(* Variant: size s - pos *)
fun countChar2'(s,c,pos) =
      if pos >= size s then
        0
      else
        countChar2'(s,c,pos+1)
         + (if String.sub(s,pos)=c then 1 else 0)
(* countChar2(s,c)
   Type: string*char->int
   Pre: (ingen)
   Post: Antalet förekomster av c i s
   Ex.: countChar2("Hej, du glade",#"d")=2
        countChar2("Hej, du glade",#"q")=0 *)
fun countChar2(s,c) = countChar2'(s,c,0)
```


Exempel: räkna tecken baklänges

```
(* countChar3'(s,c,pos)
   Type: string*char*int->int
   Pre: 0<=pos<=size s
   Post: Antalet förekomster av c i s före position pos.
   Ex.: countChar3'("Hej, du glade",#"d",7)=1
        countChar3'("Hej, du glade",#"d",3)=0 *)
(* Variant: pos *)
fun countChar3'(s,c,0) = 0
  | countChar3'(s,c,pos) =
      countChar3'(s,c,pos-1)
        + (if String.sub(s,pos-1)=c then 1 else 0);

(* countChar3(s,c)
   Type: string*char->int
   Pre: (ingen)
   Post: Antalet förekomster av c i s
   Ex.: countChar3("Hej, du glade",#"d")=2
        countChar3("Hej, du glade",#"q")=0 *)
fun countChar3(s,c) = countChar3'(s,c,size s);
```

En annan analys av summeringsproblemet



Konstruktionen kallas för en *loop*.

(Det spelar ingen roll om vi adderar n+...+0 eller 0+...+n)

Iteration i ML

```
fun sumUpTo n = sumUpToAux(n,0)
fun sumUpToAux(0,sum) = sum
  | sumUpToAux(n,sum) = sumUpToAux(n-1,sum+n)
```

Basfall

Rekursivt anrop

En hjälpfunktion `sumUpToAux` implementerar loopen. Tekniken kallas *iteration* (*svansrekursion*) och är ett specialfall av rekursion.

Argumentet `sum` kallas för *ackumulator*.

Obs att nya värden för `n` och `sum` beräknas *samtidigt*.

```
sumUpTo 2
—> sumUpToAux(2,0)
—> sumUpToAux(2-1,0+2)
—> sumUpToAux(1,2)
—> sumUpToAux(1-1,2+1)
—> sumUpToAux(0,3)
—> 3
```


Bindningar i iteration

```
fun sumUpToAux(0,sum) = sum
  | sumUpToAux(n,sum) = sumUpToAux(n-1,sum+n)
sumUpToAux(2,0)
—> sumUpToAux(n-1,sum+n)[n—>2,sum—>0]
—> sumUpToAux(2-1,sum+n)[n—>2,sum—>0]
—> sumUpToAux(1,sum+n)  [n—>2,sum—>0]
—> sumUpToAux(1,0+n)    [n—>2,sum—>0]
—> sumUpToAux(1,0+2)    [n—>2,sum—>0]
—> sumUpToAux(1,2)      [n—>2,sum—>0]
—> sumUpToAux(n-1,sum+n)[n—>1,sum—>2]
                  [n—>2,sum—>0] skuggas bort helt…
—> sumUpToAux(1-1,sum+n)[n—>1,sum—>2]
—> sumUpToAux(0,sum+n)  [n—>1,sum—>2]
—> sumUpToAux(0,2+n)    [n—>1,sum—>2]
—> sumUpToAux(0,2+1)    [n—>1,sum—>2]
—> sumUpToAux(0,3)      [n—>1,sum—>2]
—> 3
```


Funktionsspecifikationen för `sumUpToAux`

```
sumUpToAux(n,sum)
Type: int*int->int
```

För att rekursionen skall terminera krävs att `n` inte är mindre än 0:

```
Pre: n>=0
```

Man kan inte kräva `sum`=0. Det gäller *inte* för de rekursiva anropen!

Eftervillkoret är *inte* att `sumUpToAux` ”summerar talen 0 till `n`”. Så är den avsedd att *användas* – men det är inte vad den *faktiskt* gör.

```
Post: Summan av sum och talen från 0 till n.
```

Exempel behövs också...

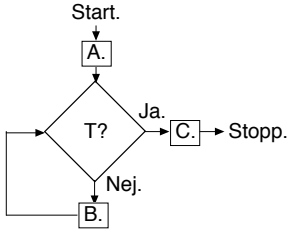
```
Ex.: sumUpToAux(3,0) = 6
     sumUpToAux(4,5) = 15
     sumUpToAux(0,2) = 2
```

Rekursionsvarianten anges som del av programdokumentationen.

```
Variant: n
```


Kodningsmönster för iteration

Flödesschema för funktionen `foo`:



Kod för funktionen `foo`:

```
fun foo x = fooAux A

fun fooAux x =
      if T then
        C
      else
        fooAux B
```


Exempel: räkna uppåt med iteration

```
(* sumUpToAux(n,i,sum)
   Type: int*int*int->int
   Pre: n>=i-1
   Post: Summan av sum och talen från i till n.
   Ex.: sumUpToAux(4,0,0) = 10
        sumUpToAux(4,2,1) = 10 *)
(* Variant: n-i+1 *)
fun sumUpToAux(n,i,sum)=if i>n then
                          sum
                        else
                          sumUpToAux(n,i+1,sum+i);
(* sumUpTo n
   Type: int->int
   Pre: n >= 0
   Post: Summan av talen från 0 till n
   Ex.: sumUpTo 4 = 10
        sumUpTo 0 = 0 *)
fun sumUpTo n = sumUpToAux(n,0,0);
```

Exempel: räkna tecken med iteration

```
(* countCharAux(s,c,count)
   Type: string*char*int->int
   Pre: (ingen)
   Post: Summan av count och antalet förekomster av c i s.
   Ex.: countCharAux("Hej, du glade",#"d",0)=2
        countCharAux("Hej, du glade",#"q",5)=5 *)
(* Variant: size s  *)
fun countCharAux("",c,count) = count
  | countCharAux(s,c,count) =
      countCharAux(String.substring(s,1,size s -1), c,
                   if String.sub(s,0)=c then
                     count+1
                   else
                     count)

(* countChar(s,c)
   Type: string*char->int
   Pre: (ingen)
   Post: Antalet förekomster av c i s
   Ex.: countChar("Hej, du glade",#"d")=2
        countChar("Hej, du glade",#"q")=0 *)
fun countChar(s,c) = countCharAux(s,c,0);
```


Minnesbehov

Rekursion i allmänhet behöver minne i proportion till antalet rekursiva anrop eftersom en del av beräkningen ”väntar”.

```
sumUpTo 2
—> sumUpTo(2-1)+2
—> sumUpTo(1)+2
—> (sumUpTo(1-1)+1)+2
—> (sumUpTo(0)+1)+2
—> (0+1)+2
—> 1+2
—> 3
```

Detta påverkar också beteendet vid icke-terminering.
Uttrycket blir hela tiden större... Minnet tar efterhand slut.

Slut på minne vid rekursion

Även ett korrekt terminerande program *kan* få slut på minne om de rekursiva anropen är många och/eller kräver mycket minne.

```
(* sumDiff(n)
   Type: int->int
   Pre: n>=0, n är jämnt
   Post: Summan av serien 0-1+2-3+4 … n
   Ex.: sumDiff(10) = 5 *)
(* Variant: n *)
fun sumDiff 0 = 0
  | sumDiff n = n - (n-1) + sumDiff(n-2)

- foo 100000;
> val it = 50000 : int
- foo 1000000;
! Uncaught exception:
! Out_of_memory
```


Minnesbehov vid iteration

Iteration har *konstant minnesåtgång*.

```
fun sumUpTo n = sumUpToAux(n,0)

fun sumUpToAux(0,sum) = sum
  | sumUpToAux(n,sum) = sumUpToAux(n-1,sum+n)

sumUpTo 2
—> sumUpToAux(2,0)
—> sumUpToAux(2-1,0+2)
—> sumUpToAux(1,2)
—> sumUpToAux(1-1,2+1)
—> sumUpToAux(0,3)
—> 3
```

Minnet kan aldrig ta slut (inte pga rekursionen i alla fall) – även om rekursionen inte terminerar.

Beräkningsordning i rekursion

`foo` och `foo'` plockar isär en sträng men sätter genast ihop den igen.

```
fun fooAux("",ack) = ack
  | fooAux(s,ack)  =
       fooAux(String.substring(s,1,size s -1),
              String.substring(s,0,1) ^ ack)
fun foo s = fooAux(s,"")

fun foo' "" = ""
  | foo' s  = String.substring(s,0,1) ^
       foo'(String.substring(s,1,size s -1)

foo("abc") = "cba"
foo'("abc") = "abc"
```

Användning av ackumulator ger annan ordning i resultatet!

Flera basfall

Vänd på tecknen i en sträng! Problemuppdelning:

- Byt plats på första och sista tecknet
- Byt plats på tecknen emellan

Vad händer om strängen har jämnt antal tecken? Udda?
Två basfall – för variantvärden 0 resp. 1.

```
(* Variant: size s *)
fun revString "" = ""
  | revString s =
      if size s = 1 then
        s
      else
        String.substring(s,size s -1,1) ^
         revString(String.substring(s,1,size s-2))
         ^ String.substring(s,0,1)
```

Vanliga fel i algoritmbeskrivningar

Rekursion handlar om upprepning. Beskrivningar av algoritmer med upprepning måste man göras extra noga – speciellt med syftningar.

Felaktig algoritmbeskrivning för funktionen `sumUpToAux`:

1. Sätt summan till 0 . Börja med talet i = 0.
2. Addera talet till summan.
3. Upprepa steg 2 med nästa tal tills talet = n.

- Vad syftar ”talet” på i steg 2 och 3?
- Vad är ”nästa tal” i steg 3? Antagligen i+1, men samma uttrycks-sätt kan betyda att gå till nästa tal i en *följd* av olika tal.
- Hur förstår man att steg 2 måste upprepas *om och om igen*?
- Hur förstår man att i steg 3 måste i ökas med 1 i varje upprepning?
- Något måste ändras i steg 2 när det upprepas. Vad?
- Var finns resultatet när algoritmen avslutas?

Bättre algoritmbeskrivning

Felaktig algoritmbeskrivning för funktionen `sumUpToAux`.

1. Sätt summan till 0 . Börja med talet i = 0.
2. Addera talet till summan.
3. Upprepa steg 2 med nästa tal tills talet = n.

Riktig algoritmbeskrivning för funktionen `sumUpToAux`.

1. Sätt summan till 0 och i till 0.
2. Är i > n? I så fall stoppa, summan är resultatet.
3. Addera talet i till summan.
4. Addera 1 till i.
5. Gå till steg 2.

Testning av rekursion

Grundprinciperna gäller:

- *All* kod.
- *Gränsfall* (inklusive *triviala* fall)
- *Typiska* (icke-triviala) fall som täcker *hela specifikationen*

Gränsfall är t.ex. vid testning av `sumRange`:

- inga tal / ett tal / två tal (kanske)

...vid testning av `revString`:

- tom sträng / sträng med ett tecken /
  sträng med två tecken / sträng med tre tecken (kanske)

...vid testning av `countChar`:

- tom sträng / sträng med ett tecken /
  längre sträng med 0, 1 resp. 2 tecken som stämmer /
  tecken som (inte) stämmer på plats 0 resp. 1 i strängen...