TENTAMEN: DEL B
Reglerteknik I 5hp

Tid: Fredag 10 juni 2011, kl. 8.00-13.00

Plats: Polacksbackens skrivsal

Ansvarig lärare: Hans Norlander, tel. 018-4713070. Hans kommer och svarar på frågor ungefär kl 10 och kl 12.

Tillåtna hjälpmedel: Kursboken (Glad-Ljung), miniräknare, Laplace-tabell och matematisk formelsamling.

Skrivningen består av två delar, del A och del B. För att bli godkänd på skrivningen krävs att man är godkänd på del A.
Del B omfattas av detta provhäfte (uppgifterna 4 till 7).
Preliminära betygsgränser:
Betyg 3: Godkänt på del A
Betyg 4: Godkänt på del A och minst 10 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)
Betyg 5: Godkänt på del A och minst 18 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)

OBS: Svar och lösningar lämnas in på separata papper. Endast en uppgift per ark. Skriv din tentakod på varje ark.

Lösningarna ska vara tydliga och väl motiverade (om inget annat anges). Avläsningar ur diagram behöver inte vara exakta.

LYCKA TILL!

Uppgift 4 En kropp med massan $m = 1$ rör sig längs y-axeln i ett gravitationsfritt fält, påverkat av den yttre kraften u. Systemet bekrivs av Newtons andra lag, $\ddot{y}(t) = u(t)$, vilket på tillståndsform kan skrivas som

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \\ y_m(t) &= y(t) + n(t), \end{aligned}$$

där y_m är det uppmätta läget för kroppen, och n är en mätstörning. Man vill skatta $z = \frac{dy}{dt}$ utifrån y_m och u (som är känd), och avser därför konstruera en observatör.

(a) Konstruera en observatör för systemet som ger en dubbelpol i $-\alpha$ som observatörspoler. Ange också hur skattningen $\hat{z}$ av hastigheten kan fås från $\hat{x}$. **(2p)**

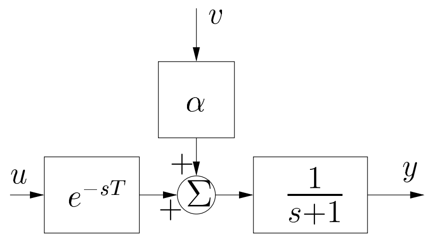
(b) Skattningen kan skrivas

$$\hat{Z}(s) = H_1(s)U(s) + H_2(s)Y_m(s).$$

Bestäm överföringsfunktionerna $H_1(s)$ och $H_2(s)$, uttryckta i α. **(2p)**

(c) Hur ska α väljas för att en sinusformad störning n med frekvens 314 rad/s eller högre inte ska förstärkas i skattningen $\hat{z}$? **(1p)**

Uppgift 5 Blockdiagrammet nedan visar ett system som påverkas av en mätbar störning, v, som kommer in via förstärkningen α. Eftersom störningen



är mätbar kan man använda framkoppling, $U(s) = F_f(s)V(s)$. Värdet på α är osäkert, men nominellt antas $\alpha = 1$ — detta värde ska användas i uppgifterna (a) och (b).

(a) Låt $F_f(s) = K_f$, d.v.s. en ren förstärkning. Bestäm K_f så att $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ när $v(t)$ är konstant (eller ett steg). (Använd $\alpha = 1$.) **(2p)**

(b) Varför är en ideal framkoppling ($\Leftrightarrow$ $F_f(s)$ väljs så att $y(t) \equiv 0$) inte användbar här? **(1p)**

(c) Komplettera framkopplingen från (a) med en återkoppling genom att använda styrlagen $U(s) = K_f V(s) - F_y(s)Y(s)$. Föreslå en regulator $F_y(s)$ sådan att $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ när $v(t)$ är konstant (eller ett steg), även för fallet då $\alpha \neq 1$. **(2p)**

Uppgift 6 Ange för vart och ett av följande påståenden ifall det är sant eller falskt.

(a) En minimal realisation är alltid insignal-utsignalstabil.

(b) Alla minimumfassystem är insignal-utsignalstabila.

(c) Alla insignal-utsignalstabila system är minimumfas.

(d) Ett slutet system med $G_o(s) = \frac{2}{s(s+1)^2}$ självsvänger med $\omega = 1$ rad/s.

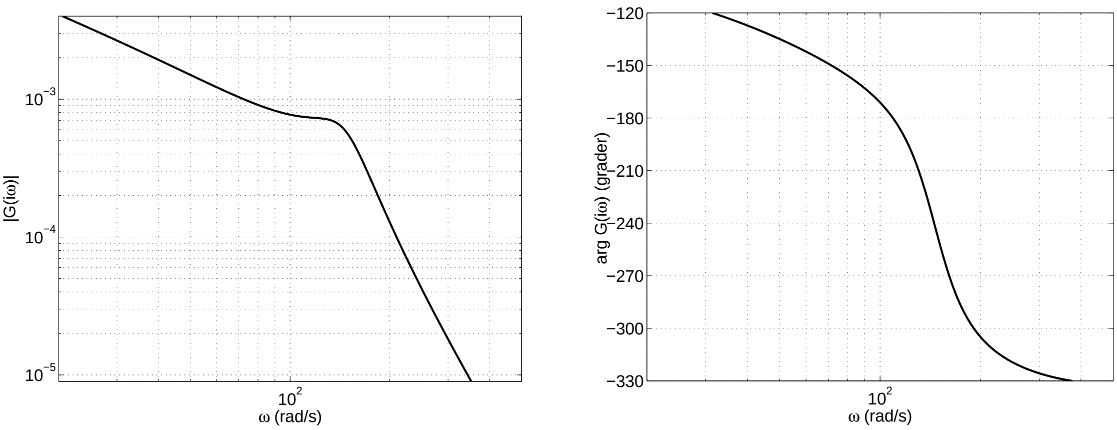
(e) Tillståndsbeskrivningen $\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$, $y(t) = x(t)$ är en minimal realisation för systemet $Y(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+1}U(s)$.

Varje rätt svar ger +1 poäng och varje felaktigt svar ger -1 poäng (och utelämnat svar ger noll poäng). Totalt ger dock uppgiften minst 0 poäng. Ingen motivering behövs — enbart svaren 'sant' och 'falskt' kommer att beaktas. **(5p)**

Uppgift 7 En viss robotarm kan beskrivas som

$$Y(s) = \frac{54.9(s+2140)}{s(s+65)(s^2+57.6s+2.14 \cdot 10^4)}U(s),$$

där insignalen u är pålagt vridmoment och utsignalen y är robotarmens vinkelutslag. Nedan visas Bodediagrammet för robotarmen.



(a) Man vill att robotarmen ska röra sig tillräckligt snabbt, dämpat och noggrant, och därför har man satt följande specifikationer: *(i)* skärfrekvensen ska vara $\omega_c = 100$ rad/s, och fasmarginalen $\varphi_m \geq 50°$, *(ii)* det kvarvarande felet hos det slutna systemets stegsvar ska elimineras helt, samt att *(iii)* regulatorn $F(s)$ ska ha så låg ordning som möjligt. Styrlagen $U(s) = F(s)(Y_{ref}(s) - Y(s))$ ska användas. Bestäm $F(s)$ så att kraven uppfylls! **(3p)**

(b) Den som fastställde specifikationerna i (a) var något naiv när det gäller reglerteknik, och glömde därför att ange det viktigaste kravet, nämligen att det slutna systemet måste vara stabilt! Är det slutna systemet stabilt med den regulator $F(s)$ som du tagit fram i (a)? **(2p)**

Lösningar till tentamen i Reglerteknik I 5hp, del B 2011-06-10

4. (a) Observatörspolerna ges av

$$0 = \det(sI - A + KC) = \det \begin{bmatrix} s+k_1 & -1 \\ k_2 & s \end{bmatrix} = s^2 + k_1 s + k_2.$$

Önskat karakteristiskt polynom är $(s+\alpha)^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2$. Identifiering av koefficienter ger $k_1 = 2\alpha$ och $k_2 = \alpha^2$. Observatören blir

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y_m - C\hat{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 2\alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} (y_m - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}).$$

Vidare, $z = \dot{y} = C\dot{x} = C(Ax + Bu)$, och här är $CA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ och $CB = 0$, så $\hat{z} = C(A\hat{x} + Bu) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}$.

(b) Laplacetransformering av observatören ger $\hat{X}(s) = (sI - A + KC)^{-1}(BU(s) + KY_m(s))$, vilket ger att $\hat{Z}(s) = CA(sI - A + KC)^{-1}(BU(s) + KY_m(s))$. Alltså är $H_1(s) = CA(sI - A + KC)^{-1}B$ och $H_2(s) = CA(sI - A + KC)^{-1}K$. Här blir

$$CA(sI - A + KC)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2\alpha & -1 \\ \alpha^2 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+\alpha)^2} \begin{bmatrix} -\alpha^2 & s+2\alpha \end{bmatrix},$$

vilket ger

$$H_1(s) = \frac{s+2\alpha}{(s+\alpha)^2} \quad \text{och} \quad H_2(s) = \frac{\alpha^2 s}{(s+\alpha)^2}.$$

(c) Eftersom $y_m = y + n$ är $H_2(s)$ överföringsfunktionen från n till z. Pga "sinus in–sinus ut" kommer en sinusformad n ge upphov till en sinusformad term i $\hat{z}$ vars amplitud är $|H_2(i314)|$ gånger så stor som n:s amplitud. Vi vill alltså att $|H_2(i314)| < 1$:

$$1 > \frac{|\alpha^2 i314|}{|i314 + \alpha|^2} = \frac{314\alpha^2}{314^2 + \alpha^2} \iff$$

$$314^2 + \alpha^2 > 314\alpha^2 \iff \alpha < \frac{314}{\sqrt{313}} = 17.75.$$

5. (a) Med $U(s) = K_f V(s)$ blir $Y(s) = \frac{K_f e^{-sT} + 1}{s+1} V(s)$. Slutvärdesteoremet ger då (med $v(t) = v$ =konstant)

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = (K_f + 1)v,$$

så välj $K_f = -1$.

(b) Den ideala framkopplingen blir $F_f(s) = -1/e^{-sT} = -e^{sT}$, vilket är ickekausalt, d.v.s. styrsignalen skulle behöva bero av framtida värden på störningen v, vilket naturligtvis är omöjligt att implementera.

(c) Med $U(s) = K_f V(s) - F_y(s)Y(s)$, och $Y(s) = \frac{1}{s+1}(e^{-sT}U(s) + \alpha V(s))$ blir det slutna systemet

$$Y(s) = \frac{K_f e^{-sT} + \alpha}{s + 1 + e^{-sT}F_y(s)} V(s),$$

och slutvärdesteoremet ger då

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \frac{K_f + \alpha}{1 + F_y(0)} v.$$

Enda sättet att få detta till noll oavsett α är att $F_y(s)$ har en pol i origo, d.v.s. har integralverkan. Välj t.ex. $F_y(s)$ som en PI-regulator. (P.g.a. tidsfördröjningen måste stabiliteten kontrolleras noggrant.)

6. **(a)** Falskt (En minimal realisation kan vara instabil); **(b)** Falskt (motexempel: $G(s) = \frac{1}{s}$); **(c)** Falskt (stabila system kan ha nollställen i HHP); **(d)** Sant ($G_o(i) = \frac{2}{i(i+1)^2} = -1$); **(e)** Sant ($\frac{s+1}{s^2+2s+1} = \frac{s+1}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1}$).

7. **(a)** Från Bodediagrammet fås $|G(i100)| = 0.77 \cdot 10^{-3}$ och $\arg G(i100) = -171°$. Regulatorn måste alltså skjuta till $41°$ i fas för att tillgodose krav *(i)* $\Longrightarrow$ använd ett leadfilter. För att uppfylla krav *(ii)* krävs integralverkan i kretsförstärkningen, d.v.s. en pol i origo. Det finns redan hos systemet, så det behövs inte hos regulatorn, och för att uppfylla kravet *(iii)* ska regulatorn inte innehålla något lagfilter, utan det räcker med leadfiltret.
Fig. 5.13 $\Longrightarrow$ välj $\beta = 0.2$ (ger $\varphi_{max} \geq 41°$). För att få leadfiltrets maxfas vid ω_c väljs $\tau_D = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\beta}} = \frac{1}{100\sqrt{0.2}} = 0.02236$. Slutligen väljs K så att $\omega_c = 100$ rad/s blir skärfrekvens:

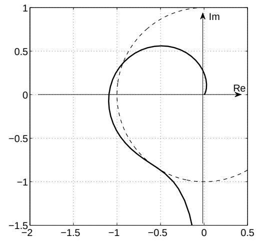
$$1 = |G_o(i\omega_c)| = \frac{K}{\sqrt{\beta}}|G(i\omega_c)| \quad\Longleftrightarrow\quad K = \frac{\sqrt{\beta}}{|G(i\omega_c)|} = \frac{\sqrt{0.2}}{0.77 \cdot 10^{-3}} = 581.$$

Regulatorn, d.v.s. leadfiltret, blir

$$F(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1} = 581\frac{0.02236s + 1}{0.2 \cdot 0.02236s + 1}.$$

(b) Använd antingen Nyquistkriteriet eller Rouths algoritm.
Nyquistkriteriet: Notera att beloppkurvan är nästan konstant i intervallet från 100 rad/s till c:a 150 rad/s, medan faskurvan minskar dramatiskt i samma intervall, från $\approx -170°$ till $\leq -220°$. I samma intervall ger leadfiltret ett belopp som är $\geq \frac{K}{\sqrt{\beta}} = \frac{1}{|G(i\omega_c)|}$ och en fas som är $\leq 41°$ — se t.ex. figur 5.14 i kursboken. Det betyder att Nyquistkurvan kommer att tangera enhetscirkel i avsedd punkt för $\omega_c = 100$ rad/s, men sedan kommer beloppet att vara större än ett igen samtidigt som fasen minskar snabbt. T.ex. för $\omega = 140$ rad/s har vi $|G_o(i140)| = |G(i140)| \cdot |F(i140)| = 0.66 \cdot 10^{-3} \cdot 581\frac{\sqrt{(0.02236\cdot 140)^2+1}}{\sqrt{(0.2\cdot 0.02236\cdot 140)^2+1}} = 1.06$, och $\arg G_o(i140) = \arg G(i140) + \arg F(i140)$

$= -129° + \arctan(0.02236 \cdot 140) - \arctan(0.2 \cdot 0.02236 \cdot 140) = -189°$, d.v.s. en punkt utanför enhetscirkeln och ovanför reella axeln. Nyquistkurvan visas i figuren nedan.



Slutsatsen är att slutna systemet är instabilt!
Rouths algoritm: Slutna systemets poler ges av

$$0 = 1 + G_o(s) = 1 + K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1}\frac{54.9(s+2140)}{s(s+65)(s^2+57.6s+2.14\cdot 10^4)}$$

$$\begin{aligned}\iff \quad 0 &= s(s+65)(s^2+57.6s+2.14\cdot 10^4)(\beta\tau_D s+1) + 54.9(s+2140)K(\tau_D s+1)\\ &= \beta\tau_D s^5 + (122.6\beta\tau_D + 1)s^4 + (25144\beta\tau_D + 122.6)s^3\end{aligned}$$
$$+((1.391\cdot 10^6\beta + 54.9K)\tau_D + 25144)s^2 + (54.9K(2140\tau_D+1) + 1.391\cdot 10^6)s + 117486K$$
$$= 4.4720\cdot 10^{-3}s^5 + 1.5483s^4 + 235.04s^3 + 32078s^2 + 2.9492\cdot 10^6 s + 68.259\cdot 10^6.$$

Rouths tablå blir

$4.4720\cdot 10^{-3}$	235.04	$2.9492\cdot 10^6$	0
1.5483	32078	$68.259\cdot 10^6$	0
142.39	$2.7520\cdot 10^6$	0	
2153.7	$68.259\cdot 10^6$	0	
$-1.7609\cdot 10^6$	0		
$68.259\cdot 10^6$			

Två teckenväxlingar i vänstraste kolumnen $\Longrightarrow$ två poler i HHP, d.v.s. instabilt! [Robotarmens överföringsfunktion är hämtad från avsnitt 2.9 i Glad/Ljung.]