TENTAMEN: DEL A
Reglerteknik I 5hp

Tid: Torsdag 19 december 2013, kl. 8.00-11.00

Plats: Magistern

Ansvarig lärare: Hans Norlander, tel. 018-4713070.

Tillåtna hjälpmedel: Kursboken (Glad-Ljung), miniräknare, Laplace-tabell och matematisk formelsamling.

Examinationen består av två delar, del A och del B. För att bli godkänd krävs att man är godkänd på del A, och för detta krävs godkänt på varje uppgift. Del B är frivillig och ges endast vid ordinarie tentatillfällen (vid respektive kurstillfällen).

Preliminära betygsgränser:
Betyg 3: Godkänt på del A
Betyg 4: Godkänt på del A och minst 10 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)
Betyg 5: Godkänt på del A och minst 18 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)

OBS: Svar och lösningar/motiveringar ska skrivas på angiven plats i detta provhäfte, och provhäftet ska lämnas in.
Lösningarna ska vara tydliga och väl motiverade (om inget annat anges).

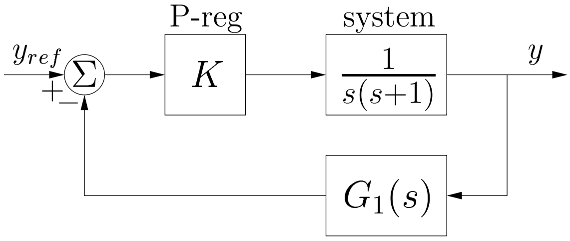
LYCKA TILL!

Tentamenskod (alt. namn och personnummer)	
Utbildningsprogram	Termin och år då du först registrerades på kursen
Bordsnummer	Klockslag för inlämning

Resultat:

Uppg. 1	Uppg. 2	Uppg. 3	Del A
G/U	G/U	G/U	G/U

Uppgift 1 Blockschemat nedan visar ett system (DC-motor) som styrs med proportionell återkoppling. Blocket med $G_1(s)$ representerar högre ordnin-



gens dynamik som t.ex. finns i mätgivaren. I uppgifterna (a) och (b) används $G_1(s) = \frac{10}{s+10}$ som modell för detta.

(a) Ange kretsförstärkningen, $G_o(s)$, samt den komplementära känslighetsfunktionen, $T(s)$, då $G_1(s) = \frac{10}{s+10}$.

Svar: $G_o(s) =$ ____________________, $T(s) =$ ____________________

Lösning:

(b) För vilka $K \in \mathbb{R}$ är det slutna systemet stabilt då $G_1(s) = \frac{10}{s+10}$?

Svar: ____________________

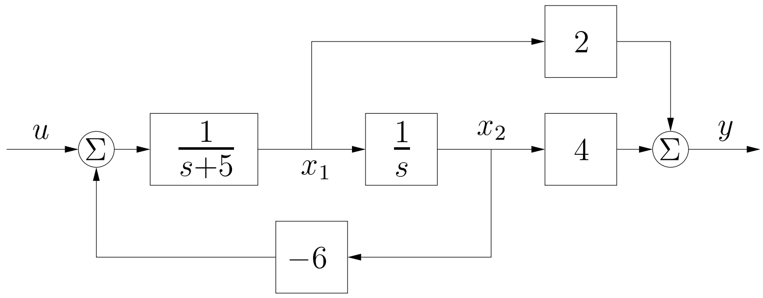
Lösning:

(c) Med den enklare modellen $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ (d.v.s. $G_1(s) = 1$) kan man representera omodellerad dynamik med det *relativa modellfelet*, $\Delta_G(s)$. Det verkliga systemet är då $G^0(s) = G(s)(1 + \Delta_G(s))$. Nu blir $T(s) = \frac{K}{s^2+s+K}$, och $|T(i\omega)| \leq M_T$ för alla ω, där $M_T = \max\left(1, K/\sqrt{K - 0.25}\right)$.

För vilka $K > 0$ kan man *garantera* stabiliteten hos det *verkliga* slutna systemet om man vet att $|\Delta_G(i\omega)| < 0.5$ för alla ω? Funkar t.ex. $K = 5$?

Svar:

Uppgift 2 Betrakta systemet i blockschemat nedan.



(a) Ställ upp tillståndsbeskrivningen för systemet med u som insignal, y som utsignal och tillståndsvektorn $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, med x_1 och x_2 enligt blockschemat.

Svar:

(b) Är tillståndsbeskrivningen i (a) en *minimal realisation*? **Svar:**____________

Motivering:

(c) Bestäm $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}$ och m i styrlagen $u = -Lx + my_{ref}$ så att slutna systemet får polpolynomet $s^2 + 8s + 20$, och att $y = y_{ref}$ i stationäritet när y_{ref} är konstant.

Svar:______________________________________

Lösning:

Uppgift 3 Nedan visas överföringsfunktionerna för sex system,

$$Y(s) = G_k(s)U(s), \quad k = 1, \ldots, 6:$$

$$G_1(s) = \frac{3}{s^2+s+4} \qquad G_2(s) = \frac{8}{s^2+6s+9} \qquad G_3(s) = \frac{8}{s^2+5s+9}$$

$$G_4(s) = \frac{8}{s^2+4s+9} \qquad G_5(s) = \frac{9}{s^2+11s+10} \qquad G_6(s) = \frac{24}{s^2+7s+25}$$

För vart och ett av systemen utför man ett stegsvarsexperiment, där man låter insignalen u vara ett enhetssteg.

(a) För vilket system är stigtiden, T_r, kortast? **Svar:**______________

(b) För vilket system är stigtiden längst? **Svar:**______________

(c) För vilket system är överslängen, M, störst? **Svar:**______________

(d) För vilket system är slutvärdet, $y_f = \lim_{t\to\infty} y(t)$, störst? **Svar:**______________

Lösning:

Vid behov kan du fortsätta dina lösningar/motiveringar på detta ark. Markera tydligt vilken uppgift som avses.

Lösningar till tentamen i Reglerteknik I 5hp, del A 2013-12-19

1. (a)

$$G_o(s) = K\frac{1}{s(s+1)}G_1(s) = K\frac{1}{s(s+1)}\frac{10}{s+10} = \frac{10K}{s(s+1)(s+10)},$$

$$T(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} = \frac{\frac{10K}{s(s+1)(s+10)}}{1+\frac{10K}{s(s+1)(s+10)}} = \frac{10K}{s(s+1)(s+10)+10K}.$$

(b) Slutna systemets poler ges av

$$0 = s(s+1)(s+10) + 10K = s^3 + 11s^2 + 10s + 10K,$$

och stabiliteten kan undersökas med Rouths algoritm:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 10 & 0 \\ 11 & 10K & 0 \\ 10 - 10K/11 & 0 & \\ 10K & & \end{array}$$

För stabilitet krävs $10 - 10K/11 > 0$ och $10K > 0$, d.v.s. $0 < K < 11$.
(c) Resultat 6.2: Om $T(s)$ är stabil och om

$$|T(i\omega)| < \frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|} \qquad \forall\omega$$

$\Rightarrow$ det verkliga slutna systemet stabilt. Här är $1/|\Delta_G(i\omega)| > 1/0.5 = 2$, så om $|T(i\omega)| < 2$ är verkliga slutna systemet stabilt. *Här blev uppgiftsformulering felaktig — $M_T = K/\sqrt{K-0.25}$ för $K \geq 0.5$, och $M_T = 1$ för $0 < K < 0.5$ borde det ha stått! (Påverkar dock ej lösbarheten i någon större utsträckning.)* Detta uppfylls för $K \leq 0.5$ ($|T| \leq 1$ då). För $K > 0.5$:

$$\frac{K}{\sqrt{K-0.25}} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad K^2 < 4(K-0.25) \quad \Leftrightarrow \quad K^2 - 4K + 1 < 0.$$

$K^2 - 4K + 1 = 0 \Leftrightarrow K = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow$ garanterat stabilt för $0 < K < 2 + \sqrt{3} \approx 3.732$. *(Med $M_T = \max(1, K/\sqrt{K-0.25})$ blir svaret $2 - \sqrt{3} < K < 2 + \sqrt{3}$.)*

2. (a) Från blockschemat fås dels att $y = 2x_1 + 4x_2$, dels att

$$X_1(s) = \frac{1}{s+5}(U(s) - 6X_2(s)) \quad \Leftrightarrow \quad sX_1(s) = -5X_1(s) - 6X_2(s) + U(s)$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s}X_1(s) \quad \Leftrightarrow \quad sX_2(s) = X_1(s).$$

Med inversa Laplacetransformen fås

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -5x_1 - 6x_2 + u, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \\ y &= 2x_1 + 4x_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} x. \end{cases}$$

Detta är styrbar kanonisk form!
(b) Minimal realisation $\Leftrightarrow$ både styrbart och observerbart (Res. 8.11). Styrbar kanonisk form $\Rightarrow$ styrbart. Observerbarhetsmatrisen blir

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -12 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det \mathcal{O} = 0.$$

Ej full rang $\Rightarrow$ ej observerbart (Res. 8.9). Därmed är det *inte* en minimal realisation!
(c) Från (a) fås direkt att $G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{2s+4}{s^2+5s+6}$ (styrbar kanonisk form). Det slutna systemet blir $Y(s) = G_c(s)mY_{ref}(s) = \frac{mb(s)}{\alpha(s)}Y_{ref}(s) = \frac{m(2s+4)}{s^2+8s+20}Y_{ref}(s)$. För att få $y = y_{ref}$ måste vi ha $G_c(0)m = 1 \Rightarrow$ välj $m = 5$. Polpolynomet blir

$$\alpha(s) = \det(sI - A + BL) = \det \left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} \right\}$$
$$= \det \begin{bmatrix} s+5+l_1 & 6+l_2 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s^2 + (5+l_1)s + 6 + l_2.$$

Identifiering av koefficienter ger $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 14 \end{bmatrix}$.

3. Jämför med "standardformen" för andra ordningens system med komplexkonjugerade poler, $G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2}$, där ω_0 är polernas avstånd från origo och $\zeta = \cos\phi$ är den relativa dämpningen (ϕ är vinkeln från polen till negativa reella axeln). Om $\zeta > 1$ är polerna reella, och den närmast origo (den dominerande) avgör snabbheten. För $0 < \zeta < 1$ är polerna komplexa, och allmänt gäller att större ω_0 ger kortare T_r, och mindre ζ ger större M. (Ex. 3.3 i Glad/Ljung $\Rightarrow M = e^{-\alpha}$, där $\alpha = \pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}$, och $T_r \approx e^{\frac{\phi}{\tan\phi}}/\omega_0$.) Slutvärdesteoremet ger $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \lim\limits_{s\to 0} sG(s)/s = G(0)$. Här har vi:

$$\begin{array}{llll}
G_1(0) = \dfrac{3}{4}, & \text{poler: } -0.5 \pm i\sqrt{3.75}, & \omega_0 = 2,\ \zeta = 0.25, & (T_r \approx 0.70) \\
G_2(0) = \dfrac{8}{9}, & \text{poler: } -3 \text{ (dubbel)}, & \omega_0 = 3,\ \zeta = 1, & (T_r \approx 0.91) \\
G_3(0) = \dfrac{8}{9}, & \text{poler: } -2.5 \pm i\sqrt{2.75}, & \omega_0 = 3,\ \zeta = \dfrac{2.5}{3}, & (T_r \approx 0.81) \\
G_4(0) = \dfrac{8}{9}, & \text{poler: } -2 \pm i\sqrt{5}, & \omega_0 = 3,\ \zeta = \dfrac{2}{3}, & (T_r \approx 0.71) \\
G_5(0) = \dfrac{9}{10}, & \text{poler: } -1,\ -10, & \text{domin. pol i -1}, & \\
G_6(0) = \dfrac{24}{25}, & \text{poler: } -3.5 \pm i\sqrt{12.75}, & \omega_0 = 5,\ \zeta = 0.70, & (T_r \approx 0.44)
\end{array}$$

(a) Kortast T_r: $G_6(s)$; **(b)** Längst T_r: $G_5(s)$; **(c)** Störst M: $G_1(s)$;
(d) Störst y_f: $G_6(s)$.