TENTAMEN: DEL B
Reglerteknik I 5hp

Tid: Torsdag 19 december 2013, kl. 13.00-16.00

Plats: Magistern

Ansvarig lärare: Hans Norlander, tel. 018-4713070. Hans kommer och svarar på frågor ungefär kl 14.30.

Tillåtna hjälpmedel: Kursboken (Glad-Ljung), miniräknare, Laplace-tabell och matematisk formelsamling.

Skrivningen består av två delar, del A och del B. För att bli godkänd på skrivningen krävs att man är godkänd på del A.
Del B är frivillig och ges endast vid ordinarie tentatillfällen (vid respektive kurstillfällen.)
Preliminära betygsgränser:
Betyg 3: Godkänt på del A
Betyg 4: Godkänt på del A och minst 10 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)
Betyg 5: Godkänt på del A och minst 18 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)

<u>OBS:</u> Svar och lösningar lämnas in på separata papper. Endast en uppgift per ark. Skriv din tentakod på varje ark.

Lösningarna ska vara tydliga och väl motiverade (om inget annat anges). Avläsningar ur diagram behöver inte vara exakta.

GOD JUL & GOTT NYTT ÅR!

Uppgift 1 En mindre satellit färdas i yttre rymden, och kan styras i y-riktningen med en liten raketmotor. Alla gravitationskrafter är försumbara, så satellitens rörelser kan beskrivas med Newtons andra lag, $m\ddot{y}(t) = u(t)$, där y är satelliten position och u är raketmotorns dragkraft. Satelliten har massan $m = 1$. En tillståndsbeskrivning för satelliten är

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \\ y_m(t) &= y(t) + n(t),\end{aligned}$$

där $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} y & \dot{y} \end{bmatrix}^T$. Här är y_m satellitens uppmätta position, och n är en mätstörning. Man vill skatta satellitens hastighet, $\dot{y} = x_2$, utifrån y_m och u (som är känd), och avser därför konstruera en observatör.

(a) Konstruera en observatör för systemet som ger en dubbelpol i $-\alpha$ som observatörspoler. **(1p)**

(b) Skattningen kan skrivas

$$\hat{X}_2(s) = H_1(s)U(s) + H_2(s)Y_m(s).$$

Bestäm överföringsfunktionerna $H_1(s)$ och $H_2(s)$, uttryckta i α. **(2p)**

(c) Mätsignalen y_m är en elektrisk spänning, och mätstörningen n är ett "brum" orsakat av läckage från nätspänningen. Därför är n en sinussignal med vinkelfrekvensen $50 \cdot 2\pi = 314$ rad/s, och vi antar att amplituden är 30 mV (= 0.030 V). Effekten av n blir en motsvarande sinussvängning i skattningen av hastigheten. Ange vad amplituden för denna sinussvängning blir (i Volt), dels med skattningen från observatören, $\hat{\dot{y}} = \hat{x}_2$, då $\alpha = 15$, dels för skattningen $\hat{\dot{y}} = \dot{y}_m$. **(2p)**

Uppgift 2 Ange för vart och ett av följande påståenden ifall det är sant eller falskt.

(a) Systemet med polpolynomet $1 + s(s + 0.8)^2$ är stabilt.

(b) Slutna systemet med kretsförstärkningen $G_o(s) = \frac{1}{s(s+0.8)^2}$ är stabilt.

(c) Maximala fasen hos leadfiltret $F_{lead}(s) = K\frac{\tau_D s+1}{\beta\tau_D s+1}$ beror av τ_D.

(d) Med $\gamma = 0$ blir lagfiltret $F_{lag}(s) = \frac{\tau_I s+1}{\tau_I s+\gamma}$ en PI-regulator.

(e) Om kretsförstärkningen $G_o(s)$ har integralverkan får känslighetsfunktionen $S(s)$ ett nollställe i origo.

Varje rätt svar ger +1 poäng och varje felaktigt svar ger -1 poäng (och utelämnat svar ger noll poäng). Totalt ger dock uppgiften minst 0 poäng. Ingen motivering behövs — enbart svaren 'sant' och 'falskt' kommer att beaktas. **(5p)**

Uppgift 3 I ett värmekraftverk produceras värme via förbränning av bränsle i en värmepanna. En väldigt enkel modell över värmepannan är

$$\frac{dy}{dt} = P_{in}(t) - P_{ut}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s}(P_{in}(s) - P_{ut}(s)),$$

där y är temperaturen i värmepannan, P_{in} är tillförd effekt och P_{ut} är utgående effekt (till fjärrvärmenätet och övriga förluster). Den tillförda effekten är direkt proportionell mot inflödet av bränsle till värmepannan. Bränslet matas in i värmepannan med ett transportband med konstant hastighet, så

$$P_{in}(t) = u(t-T) \quad \Longleftrightarrow \quad P_{in}(s) = e^{-sT}U(s),$$

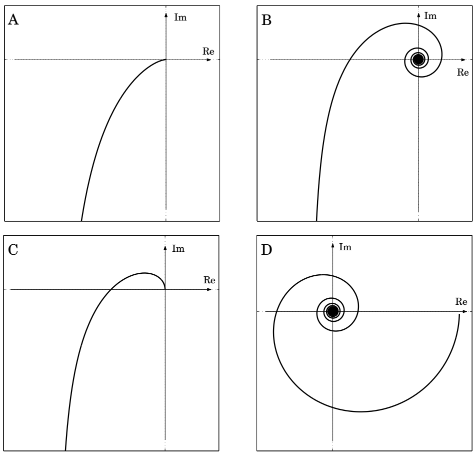
där u är bränsleflödet till transportbandet, och T är tiden det tar för transportbandet att föra in bränslet i värmepannan. Vi betraktar här u som insignal.

Optimal förbränning inträffar då temperaturen i värmepannan är y_{opt}, så för att optimera processen återkopplar man med styrlagen

$$U(s) = F(s)(Y_{ref}(s) - Y(s)),$$

där $y_{ref} = y_{opt}$ är referenssignal. I uppgifterna (a) och (b) används proportionell återkoppling, d.v.s. $F(s) = K > 0$. Kretsförstärkningen är då $G_o(s) = \frac{K}{s}e^{-sT}$.

(a) Nedan visas fyra olika Nyquistkurvor. Ange vilken av dessa Nyquistkur-



vor, A, B, C, eller D, som svarar mot kretsförstärkningen för värmepannesystemet när $F(s) = K > 0$. Motivering krävs! **(1p)**

(b) Ange ett villkor på produkten KT för att det slutna systemet ska vara stabilt, då $F(s) = K > 0$. **(2p)**

(c) Anta att $T = 5$ sekunder. Utforma en regulator $F(s)$ sådan att kretsförstärkningen får skärfrekvens $\omega_c = 0.25$ rad/s och fasmarginal $\varphi_m \geq 45°$, när styrlagen $U(s) = F(s)(Y_{ref}(s) - Y(s))$ används. Härutöver ska $y = y_{ref}$ gälla i stationäritet, när $y_{ref} = y_{opt} =$ konstant och $P_{ut} =$ konstant. Vidare får regulatorns förstärkning vid höga frekvenser inte vara större än absolut nödvändigt. **(2p)**

Uppgift 4 Ett system har tillståndsmodellen

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \overbrace{\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{=A} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t).
\end{aligned}
$$

(a) Ange e^{At}, det vill säga matrisexponentialfunktionen för systemets A-matris. **(1p)**

(b) Är tillståndsmodellen *asymptotiskt stabil*? **(2p)**

(c) Är systemet *insignal-utsignalstabilt*? **(2p)**

Ledning: För en blockdiagonal matris gäller

$$
\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & N^{-1} \end{bmatrix}.
$$

Lösningar till tentamen i Reglerteknik I 5hp, del B 2013-12-19

1. (a) Observatörspolerna ges av

$$0 = \det(sI - A + KC) = \det \begin{bmatrix} s + k_1 & -1 \\ k_2 & s \end{bmatrix} = s^2 + k_1 s + k_2.$$

Önskat karakteristiskt polynom är $(s + \alpha)^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2$. Identifiering av koefficienter ger $k_1 = 2\alpha$ och $k_2 = \alpha^2$. Observatören blir

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y_m - C\hat{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 2\alpha \\ \alpha^2 \end{bmatrix} (y_m - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}).$$

(b) Laplacetransformering av observatören ger

$$\hat{X}(s) = (sI - A + KC)^{-1}(BU(s) + KY_m(s)).$$

Eftersom $x_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{x} = \bar{C}\hat{x}$ blir $H_1(s) = \bar{C}(sI - A + KC)^{-1}B$ och $H_2(s) = \bar{C}(sI - A + KC)^{-1}K$. Här blir

$$\bar{C}(sI - A + KC)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + 2\alpha & -1 \\ \alpha^2 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s + \alpha)^2} \begin{bmatrix} -\alpha^2 & s + 2\alpha \end{bmatrix},$$

vilket ger

$$H_1(s) = \frac{s + 2\alpha}{(s + \alpha)^2} \quad \text{och} \quad H_2(s) = \frac{\alpha^2 s}{(s + \alpha)^2}.$$

(c) Eftersom $y_m = y + n$ är $H_2(s)$ överföringsfunktionen från n till $\hat{x}_2$. Pga "sinus in–sinus ut" kommer en sinusformad n ge upphov till en sinusformad term i $\hat{x}_2$ vars amplitud är $|H_2(i314)|$ gånger så stor som n:s amplitud.

$$|H_2(i314)| = \frac{|\alpha^2 i314|}{|i314 + \alpha|^2} = \frac{314\alpha^2}{314^2 + \alpha^2}.$$

Med $\alpha = 15$ blir då $|H_s(i314)| = 0.715$, vilket ger amplituden $0.030 \cdot |H_2(i314)| = 0.030 \cdot 0.715 = 0.021$ Volt, d.v.s. 21 mV. Med $\hat{\dot{y}} = \hat{y}_m$ blir överföringsfunktionen istället s, och därmed blir amplituden $0.030 \cdot |i314| = 0.030 \cdot 314 = 9.42$ Volt!

2. (a) Sant (testas t.ex. med Rouths algoritm); **(b)** Sant (ger polpolynomet i (a)); **(c)** Falskt (maxfasen φ_{max} beror bara av β); **(d)** Sant (lagfiltret blir ju $F_{lag}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s} = 1 + \frac{1}{\tau_I s}$); **(e)** Sant (med $G_o(s) = \frac{1}{s}H(s)$ blir $S(s) = \frac{s}{s + H(s)}$).

3. (a) Nyquistkurvan blir

$$G_o(i\omega) = \frac{K}{i\omega} e^{-i\omega T} \quad \Longleftrightarrow \quad |G_o(i\omega)| = \frac{K}{\omega} \quad \text{och} \quad \arg G_o(i\omega) = -\frac{\pi}{2} - \omega T.$$

Beloppet går alltså från oändligheten mot noll när ω ökar, och fasen börjar på -90° och avtar sedan linjärt med ω. Nyquistkurvan måste alltså komma upp parallellt med negativa imaginära axeln, för att sedan gå in mot origo i en spiral (omcirklar origo oändligt många gånger). Detta svarar mot Nyquistkurvan B.

(b) För stabilitet krävs att Nyquistkurvan, $G_o(i\omega)$ för $\omega \geq 0$, inte omsluter -1. Från (a) vet vi att $G_o(i\omega)$ är en spiral som går medurs mot origo när ω växer: $|G(i\omega)| = \frac{K}{\omega}$ och $\arg G(i\omega) = -\frac{\pi}{2} - \omega T$. För skärning med negativa Re-axeln krävs att $\arg G(i\omega) = -\pi \iff \omega = \frac{\pi}{2T}$, och $\left|G\left(i\frac{\pi}{2T}\right)\right| = \frac{2KT}{\pi}$, d.v.s. Nyquistkurvan skär negativa Re-axeln i $-\frac{2KT}{\pi}$. För stabilitet krävs alltså att $KT < \frac{\pi}{2}$.

(c) Systemet har överföringsfunktionen $G(s) = \frac{1}{s}e^{-sT}$, och

$$|G(i\omega)| = \frac{1}{\omega}, \quad \text{och} \quad \arg G(i\omega) = -\frac{\pi}{2} - \omega T$$

(som i (a)), så med $T = 5$ sekunder gäller vid $\omega_c = 0.25$ rad/s att

$$|G(i0.25)| = \frac{1}{0.25} = 4, \qquad \arg G(i0.25) = -\frac{\pi}{2} - 5 \cdot 0.25 \quad \text{radianer} = -161.6°.$$

Det är alltså 18° kvar till −180°, så för att få $\varphi_m \geq 45°$ måste regulatorn skjuta till 27°. För detta använder vi ett leadfilter. För kravet på noggrannhet undersöker vi slutna systemet:

$$Y(s) = \frac{1}{s}e^{-sT}U(s) - \frac{1}{s}P_{ut}(s), \qquad U(s) = F(s)(Y_{ref}(s) - Y(s)) \qquad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{F(s)\frac{1}{s}e^{-sT}}{1 + F(s)\frac{1}{s}e^{-sT}}Y_{ref}(s) - \frac{\frac{1}{s}}{1 + F(s)\frac{1}{s}e^{-sT}}P_{ut}(s) \\ &= \underbrace{\frac{F(s)e^{-sT}}{s + F(s)e^{-sT}}}_{=G_c(s)} Y_{ref}(s) - \underbrace{\frac{1}{s + F(s)e^{-sT}}}_{=G_{P_{ut}}(s)} P_{ut}(s). \end{aligned}$$

För att få $y = y_{ref}$ måste $G_c(0) = 1$ och $G_{P_{ut}}(0) = 0$, vilket åstadkommes ifall $F(s)$ har integralverkan, d.v.s. en pol i origo. Detta fixas med ett lagfilter med $\gamma = 0$. För att kompensera för lagfiltret bör leadfiltret då skjuta till totalt 27° + 6° = 33°. Fig. 5.13 $\Rightarrow$ välj $\beta = 0.29$ (och inte mindre för att undvika för hög förstärkning vid höga frekvenser). För att få maxfasen vid $\omega_c = 0.25$ rad/s väljs $\tau_D = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\beta}} = \frac{1}{0.25\sqrt{0.29}} = 7.43$. För att verkligen göra $\omega_c = 0.25$ rad/s till skärfrekvens:

$$1 = |G_o(i\omega_c)| = \frac{K}{\sqrt{\beta}}|G(i\omega_c)| \quad \Leftrightarrow \quad K = \frac{\sqrt{\beta}}{|G(i\omega_c)|} = \frac{\sqrt{0.29}}{4} = 0.135.$$

Leadfiltret blir alltså

$$F_{lead}(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1} = 0.135 \cdot \frac{7.43s + 1}{0.29 \cdot 7.43s + 1}.$$

Lagfiltret ska alltså ha $\gamma = 0$, och enligt tumregel väljes $\tau_I = 10/\omega_c = 10/0.25 = 40$. Lagfiltret blir

$$F_{lag}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma} = \frac{40s + 1}{40s},$$

och den totala regulatorn blir $F(s) = F_{lead}(s)F_{lag}(s)$.

4. (a) Utnyttja att $\mathcal{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1}$:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+2 & 1 & 0 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & (s-1)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+2s+1} & \frac{-1}{s^2+2s+1} & 0 \\ \frac{1}{s^2+2s+1} & \frac{s+2}{s^2+2s+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{-1}{(s+1)^2} & 0 \\ \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{At} = \begin{bmatrix} (1-t)e^{-t} & -te^{-t} & 0 \\ te^{-t} & (1+t)e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}.$$

(b) Res. 8.7: Asymptotisk stabilitet $\Leftrightarrow$ alla egenvärden till A i VHP. Det karakteristiska polynomet blir

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+2 & 1 & 0 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix} = (s-1)\det \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} = (s-1)(s^2+2s+1),$$

vilket har ett nollställe i $+1$. Alltså är det *inte* asymptotiskt stabilt.

(c) Sats 2.2: Insignal-utsignalstabilitet $\Leftrightarrow$ alla poler till $G(s)$ ligger i VHP. Här blir

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 1 & 0 \\ -1 & s & 0 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{-1}{(s+1)^2} & 0 \\ \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)^2},$$

som ju har en dubbelpol i -1. Alltså är det insignal-utsignalstabilt! (Tillståndsmodellen är inte observerbar, och den instabila polen i $+1$ förkortas bort i $G(s)$.)