TENTAMEN: DEL A
Reglerteknik I 5hp

Tid: Torsdag 23 oktober 2014, kl. 8.00-11.00

Plats: Fyrislundsgatan 80, Sal 1

Ansvarig lärare: Kjartan Halvorsen, tel. 073-776 0902.

Tillåtna hjälpmedel: Kursboken (Glad-Ljung), miniräknare, Laplace-tabell och matematisk formelsamling.

Examinationen består av två delar, del A och del B. För att bli godkänd krävs att man är godkänd på del A, och för detta krävs godkänt på varje uppgift. Del B är frivillig och ges endast vid ordinarie tentatillfällen (vid respektive kurstillfällen).

Preliminära betygsgränser:
Betyg 3: Godkänt på del A
Betyg 4: Godkänt på del A och minst 10 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)
Betyg 5: Godkänt på del A och minst 18 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)

OBS: Svar och lösningar/motiveringar ska skrivas på angiven plats i detta provhäfte, och provhäftet ska lämnas in.
Lösningarna ska vara tydliga och väl motiverade (om inget annat anges).

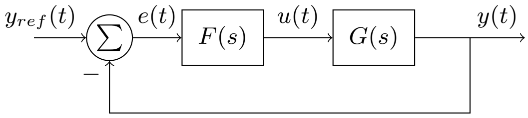
LYCKA TILL!

Tentamenskod	(alt. namn och personnummer)
Utbildningsprogram	Termin och år då du först registrerades på kursen
Bordsnummer	Klockslag för inlämning

Resultat:

Uppg. 1	Uppg. 2	Uppg. 3	Del A
G/U	G/U	G/U	G/U

Uppgift 1 En inverterad pendel med överföringsfunktionen $G(s) = \frac{1}{s^2-1}$ regleras från reglerfelet $e(t) = y_{ref}(t) - y(t)$ med en PD-regulator $F(s) = K(0.5s+1)$.



(a) Visa att det slutna systemets överföringsfunktion från y_{ref} till y blir

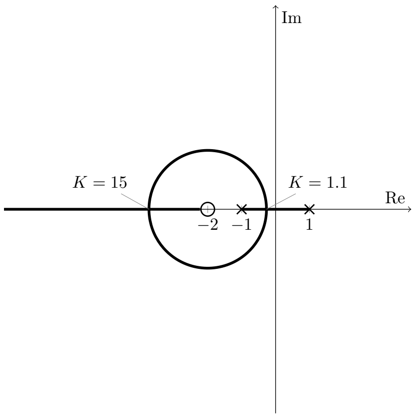
$$G_c = \frac{K(0.5s+1)}{s^2 + 0.5Ks + K - 1}.$$

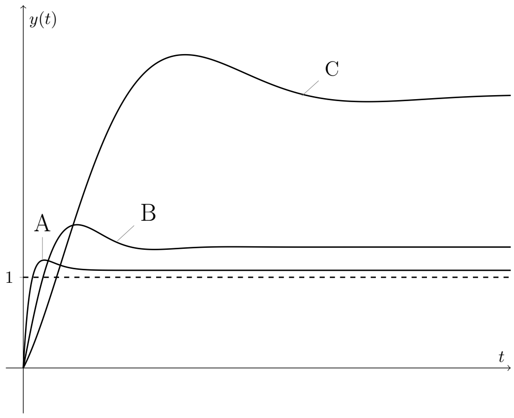
Härledning:

(b) För vilka värden på K är det slutna systemet stabilt?

Svar:

(c) Nedan visas rotorten för det slutna systemets poler med avseende på parametern K, samt tre olika stegsvar för det slutna systemet.





Ringa in i tabellen nedan vilket av stegsvaren A, B och C som hör till respektive värde på parametern K. Motivera!

$K = 1.5$	A	B	C	$K = 4$	A	B	C	$K = 14$	A	B	C

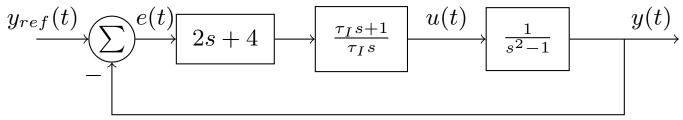
Motivering:

Uppgift 2

(a) Antag att man vid en design av regulatorn i uppgift 1 kom fram till PD-regulatorn

$$F(s) = 4(0.5s + 1).$$

Problemet är dock att stegsvaret har ett stationärt fel. För att eliminera det stationära felet lägger man till en integrerande länk i regulatorn



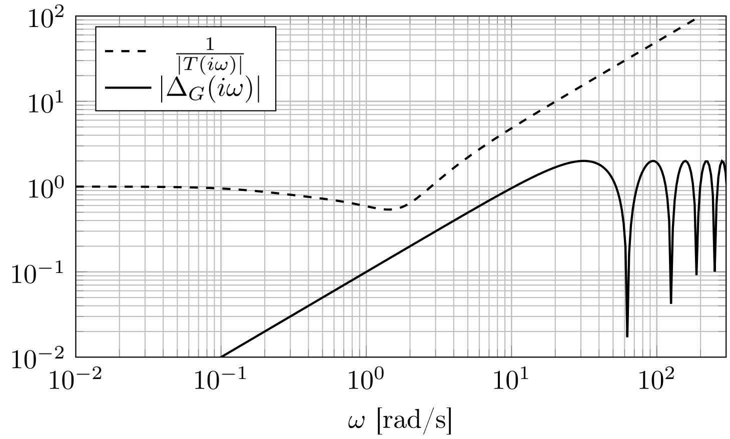
Visa att med denna regulator får man $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$ när $y_{ref}(t)$ är ett steg.

Svar:

(b) Antag nu att det verkliga systemet innehåller en tidsfördröjning $G^0(s) = e^{-0.1s}\frac{1}{s^2-1}$ som man inte tagit hänsyn till i designen av regulatorn. Det relativa modellfelet blir därmed

$$\Delta_G(s) = \frac{G^0(s) - G(s)}{G(s)} = e^{-0.1s} - 1.$$

Man vill säkerställa att det slutna systemet är *robust* mot detta modellfel. I figuren nedanför visas $|\Delta_G(i\omega)|$ och $|\frac{1}{T(i\omega)}|$, där $T(i\omega)$ är den komplementära känslighetsfunktionen $T = \frac{G_o}{1+G_o}$. Om det slutna systemet baserad på den antagna modellen $G(s)$ är stabilt, kan man då garantera att samma regulator applicerad på det sanna systemet $G^0(s) = G(s)(1 + \Delta_G(s))$ också är stabilt?



Motivation:

Uppgift 3 Den inverterade pendeln i uppgift 1 har alltså överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 1}.$$

(a) Skriv systemet som en tillståndsmodell på observerbar kanonisk form

Svar:

(b) Visa att tillståndsmodellen är en *minimal realisation*

Härledning:

(c) Endast systemets utsignal (vinkeln från vertikalen) finns tillgänglig för återkoppling, därför ansätts en observatör

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

för att skatta tillståndet, där

$$K = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Vad blir observatörens poler?

Lösning:

Vid behov kan du fortsätta dina lösningar/motiveringar på detta ark. Markera tydligt vilken uppgift som avses.

Lösningar till tentamen i Reglerteknik I 5hp, del A 2014-10-23

1. (a) Kretsförstärkningen blir

$$G_o = K\frac{0.5s+1}{s^2-1},$$

och det slutna systemet

$$G_C = \frac{G_o}{1+G_o} = \frac{K\frac{0.5s+1}{s^2-1}}{1+K\frac{0.5s+1}{s^2-1}} = \frac{K(0.5s+1)}{s^2-1+K(0.5s+1)} = \frac{K(0.5s+1)}{s^2+0.5Ks-1+K}.$$

(b) Det slutna systemets karakteristiska ekvation blir

$$s^2 + 0.5Ks + K - 1 = 0$$

med lösningar

$$s = -\frac{0.5K}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(0.5K)^2 - 4(K-1)}$$

. Lösningarna ligger symmetriskt om $-\frac{0.5K}{2}$, så vi måste ha

$$-\frac{0.5K}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(0.5K)^2 - 4(K-1)} < 0$$

$$(0.5K)^2 - 4(K-1) < (0.5K)^2$$

$$\Rightarrow \quad K > 1.$$

(c) Vi ser att det slutna systemets poler hamnar länger ifrån origo ju större K är så länge $K < 15$ (efter detta får systemet en pol som närmer sig -2). Vi kan alltså betrakta snabbheten i stegsvaren och får

$K = 1.5$	C
$K = 4$	B
$K = 14$	A

2. (a) Vi har överföringsfunktionen från y_{ref} till $e(t)$

$$E(s) = \frac{1}{1+G_o(s)}Y_{ref}(s) = \frac{1}{1+F(s)G(s)\frac{\tau_I s+1}{\tau_I s}}Y_{ref}(s) = \frac{\tau_I s}{\tau_I s + F(s)G(s)(\tau_I s+1)}Y_{ref}(s).$$

Vi ser att den statiska förstärkningen är 0, då $F(0) \neq 0$, $G(0) \neq 0$, så $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$ för konstant referenssignal.

2. (b)

Enligt Resultat 6.2 (s 125) i Glad & Ljung, så har vi garanterad stabilitet om

$$|\Delta_G(i\omega)| < \frac{1}{|T(i\omega)|} \quad \forall\omega.$$

Så är fallet här, då beloppskurvan för Δ_G ligger under $\frac{1}{|T|}$ för alla ω.

3. (a) Vi har nämnarpolynomet $p(s) = s^2 + 0s - 1$. Observerbar kanonisk form (se Resultat 8.2 (s 159) i Glad & Ljung):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x.$$

3. (b) En realisation är minimal då den både är styrbar och observerbar. Systemet är observerbart då det står på observerbar kanonisk form. Styrbart är det också, då

$$\det \mathcal{S} = \det \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq 0.$$

3. (c) Observatörens poler ges av egenvärdena till matrisen $A - KC$. För system på observerbar kanonisk form blir det extra enkla beräkningar.

$$KC = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{och}$$

$$A - KC = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 - 9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrisen är på observerbar kanonisk form, och det karakteristiska polynomets koefficienter kan läsas direkt ur första kolumnen:

$$s^2 + 4s + 8,$$

vilket ger poler i

$$s = -2 \pm 2i.$$