TENTAMEN: DEL B
Reglerteknik I 5hp

Tid: Torsdag 23 oktober 2014, kl. 13.00-16.00

Plats: Fyrislundsgatan 80, Sal 1

Ansvarig lärare: Kjartan Halvorsen, tel. 073-776 0902.

Tillåtna hjälpmedel: Kursboken (Glad-Ljung), miniräknare, Laplace-tabell och matematisk formelsamling.

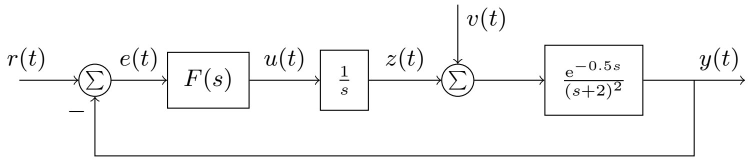
Skrivningen består av två delar, del A och del B. För att bli godkänd på skrivningen krävs att man är godkänd på del A.
Del B är frivillig och ges endast vid ordinarie tentatillfällen (vid respektive kurstillfällen.)
Preliminära betygsgränser:
Betyg 3: Godkänt på del A
Betyg 4: Godkänt på del A och minst 10 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)
Betyg 5: Godkänt på del A och minst 18 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)

<u>OBS:</u> Svar och lösningar lämnas in på separata papper. Endast en uppgift per ark. Skriv din tentakod på varje ark.

Lösningarna ska vara tydliga och väl motiverade (om inget annat anges). Avläsningar ur diagram behöver inte vara exakta.

LYCKA TILL!

Uppgift 1 En anestesiläkare måste övervaka flera fysiologiska variabler hos patienten under en operation. För att underlätta arbetet används regulatorer som med återkoppling av uppmätta värden styr doseringen av läkemedel. Antag följande förenklade modell av en blodtrycks-regulator.



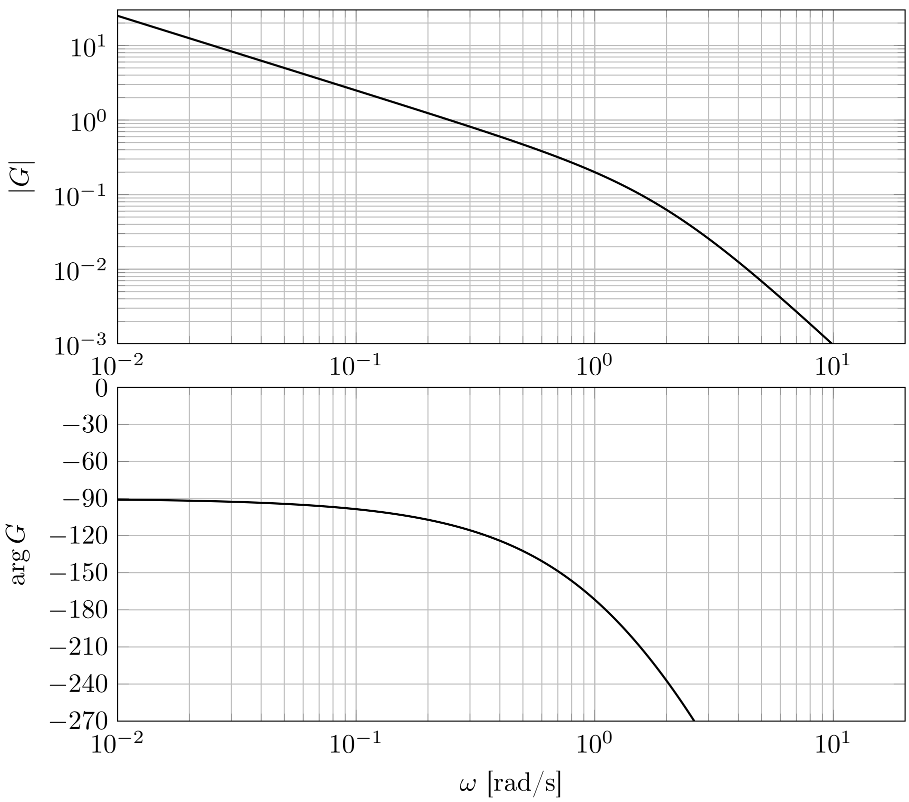
Regulatorn styr ventilinställningen på en doseringspump som tillsätter läkemedel i patientens inandningsluft. Flödet av läkemedel antas vara proportionellt mot ventilens position

$$\dot{z}(t) = u(t).$$

Dynamiken i hur patientens blodtryck (medelartärtryck) reagerar på läkemedlet är framtaget experimentellt och kan approximeras med överföringsfunktionen

$$G_p(s) = \frac{e^{-0.5s}}{(s+2)^2}.$$

Figuren nedanför visar Bodediagrammet för $G(s) = \frac{1}{s}G_p(s)$.



(a) Man ansätter först en proportionell regulator $F(s) = K_P$. För vilket värde på K_P får man självsvängningar ? **(1p)**

(b) Hur snabbt återkopplat system kan man åstadkomma med proportionell återkoppling om man vill ha en fasmarginal på $\varphi_m = 60^o$? Ange även *approximativt* T_r, stigtiden för det slutna systemets stegsvar. **(1p)**

(c) Bestäm en regulator av så låg ordning som möjligt som uppfyller följande specifikationer

1. Fasmarginalen ska vara $\varphi_m = 60^o$.
2. Stigtiden ska vara hälften av vad som är möjligt med enbart proportionell återkoppling och fasmarginal som ovan.
3. En konstant störning $v(t)$ ska inte ge något kvarstående reglerfel.

(3p)

Uppgift 2 Ange för vart och ett av följande påståenden ifall det är sant eller falskt.

(a) Ett slutet system med kretsförstärkningen $G_o(s) = \frac{s-b}{s+a}$ med positiva a och b är alltid stabilt.

(b) Maximala fasen för ett lead-filter $F_{lead}(s) = K\frac{\tau_D s+1}{\beta\tau_D s+1}$ beror på τ_D.

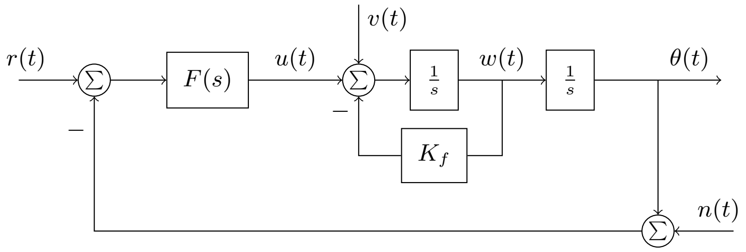
(c) Om kretsförstärkningen $G_o(s)$ har integralverkan så får känslighetsfunktionen $S(s)$ nollställe i origo.

(d) För känslighetsfunktionen $S(s)$ och komplementära känslighetsfunktionen $T(s)$ gäller $|S(i\omega)| + |T(i\omega)| = 1$ för alla ω.

(e) Alla minimala realisationer är observerbara.

Varje rätt svar ger +1 poäng och varje felaktigt svar ger -1 poäng (och utelämnat svar ger noll poäng). Totalt ger dock uppgiften minst 0 poäng. Ingen motivering behövs — enbart svaren 'sant' och 'falskt' kommer att beaktas. **(5p)**

Uppgift 3 Positioneringen av teleskop kräver noggrann reglering för att teleskopet ska kunna ge skarpa bilder vid långa exponeringstider. Betrakta nedanstående förenklade modell av positioneringen i en riktning.



Signalen $r(t)$ är den önskade riktningen, v är en störande kraft på teleskopet och n är mätbrus i mätningen av teleskopets riktning. Den inre återkopplingen med förstärkningen K_f kommer från ett visköst dämpningssystem.

(a) Beräkna överföringsfunktionen $G_t(s)$ från $u(t)$ och $v(t)$ till $\theta(t)$ för det öppna systemet

$$\Theta(s) = G_t(s)\big(U(s) + V(s)\big) = G_t(s)U(s) + G_t(s)V(s).$$

Ledning: Det kan underlätta att införa signalen $w(t)$ där $\Theta(s) = \frac{1}{s}W(s)$. **(1p)**

(b) Beräkna överföringsfunktionerna från $r(t)$, $v(t)$ och $n(t)$ till utsignalen $\theta(t)$ för det slutna systemet

$$\Theta(s) = G_r(s)R(s) + G_v(s)V(s) + G_n(s)N(s).$$

(1p)

(c) Antag att teleskopet regleras med PI-regulatorn

$$F(s) = K\frac{2s+1}{s},$$

och att $K_f = 2$. För vilka värden på K är det slutna systemet stabilt? **(1p)**

(d) Vad blir det kvarstående felet i teleskopets orientering om $v(t) = t$ är en ramp och $r(t) = 0$, $n(t) = 0$? **(1p)**

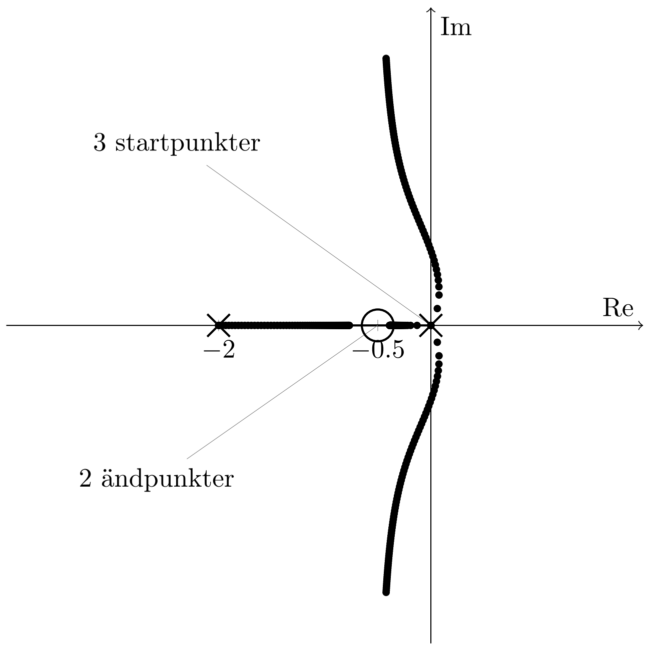
(e) För att eliminera rampfelet helt krävs ytterligare en integrering i regulatorn, och man ansätter den nya regulatorn

$$F(s) = K\frac{(2s+1)^2}{s^2}$$

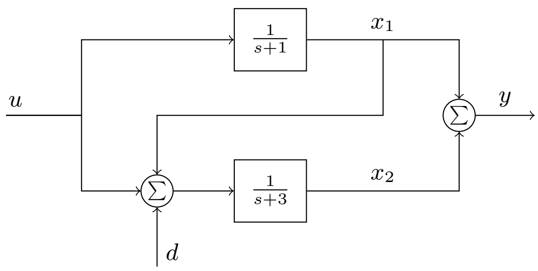
vilket ger den karakteristiska ekvationen

$$s^3(s+2) + K(2s+1)(2s+1) = 0.$$

En rotort som visar det slutna systemets poler med avseende på K visas nedanför. Beskriv kort det slutna systemets egenskaper med avseende på stabilitet, snabbhet, och dämpning för olika värden på K! **(1p)**



Uppgift 4 Ett system är givet av blockdiagrammet nedanför.



(a) Ställ upp en tillståndsmodell för systemet med de tillståndsvariabler som är givna i diagrammet. **(2p)**

(b) Beräkna en tillståndsåterkoppling $u(t) = -Lx(t)$ som ger ett slutet system med poler i -4. **(2p)**

(c) Bestäm det slutna systemets överföringsfunktion från $d(t)$ till $y(t)$. **(1p)**

Lösningar till tentamen i Reglerteknik I 5hp, del B 2014-10-23

1. (a) *[Modellen av blodtryckreglering kommer från Dorf & Bishop "Modern Control Systems"]* Självsvängningar inträffar när Nyquistkurvan går igenom punkten -1. Den proportionella återkopplingen påverkar inte faskurvan, endast beloppskurvan. Betrakta därför den frekvens för vilken fasen är -180^{o}. Avläsning i Bodediagrammet ger $\omega_{pc} = 1.1$ rad/s. För egensvängningar ska beloppskurvan skära 1 vid samma frekvens, vilket ger

$$K_P|G(i1.1)| = 1$$

$$\Rightarrow \quad K_P = \frac{1}{|G(i1.1)|} = \frac{1}{0.18}.$$

1. (b) Bestäm den frekvens för vilken man har önskad fasmarginal. Dvs sök frekvens ω_c , så att

$$\arg G_o(i\omega_c) = \arg K + \arg G(i\omega_c) = \arg G(i\omega_c) = -180 + 60 = -120.$$

Avläsning i Bodediagrammet ger

$$\omega_c = 0.35 \text{ rad/s}.$$

Med approximationen att systemet är ett andra ordningens system får vi från figur 5.11 i boken att en fasmarginal på $\varphi_m = 60^{\mathrm{o}}$ motsvarar en dämpningsfaktor $\zeta = 0.61$. Från figur 5.12 ser vi därmed att $\omega_c = 0.35$ motsvarar

$$T_r = \frac{1.33}{0.35} = 3.8.$$

1. (c) Vi önskar alltså att ha skärfrekvens som är dubbel så hög som i (b). Det ger $\omega_c = 0.7$. Vid denna frekvensen läser vi av i Bodediagrammet

$$|G(i0.7)| = 0.3$$

$$\arg G(i0.7) = -150^{\mathrm{o}}.$$

Börja med att avgöra om lagfiltret behövs. Överföringsfunktionen från störning till utsignal för det slutna systemet är

$$G_v(s) = \frac{\frac{\mathrm{e}^{-0.5s}}{(s+2)^2}}{1 + F_{lead}(s)F_{lag}(s)\frac{\mathrm{e}^{-0.5s}}{(s+2)^2}} = \frac{s\mathrm{e}^{-0.5s}}{s(s+2)^2 + F_{lead}(s)F_{lag}(s)\mathrm{e}^{-0.5s}}.$$

Vi ser därmed att överföringsfunktionen har statisk förstärkning lika med 0 om $F_{lead}(s)F_{lag}(s) \neq 0$. Så **lagfiltret behövs inte.**

Lead-design: Har leadfiltret $F(s) = K\frac{\tau_D s+1}{\beta\tau_D s+1}$. Börja med att bestämma β så att vi får tillräcklig fasförbättring vid skärfrekvensen. Vi behöver

$$\arg G_o(i0.7) = \arg F_{lead}(i0.7) + \arg G(i0.7) = -180^{\mathrm{o}} + 60^{\mathrm{o}},$$

vilket ger

$$\arg F_{lead}(i0.7) = -120^{\circ} + 150^{\circ} = 30^{\circ}.$$

Avläsning i figur 5.13 i Glad & Ljung ger

$$\beta = 0.33.$$

Bestäm tidskonstanten så att max fasavancering fås vid $\omega_c = 0.7$:

$$\tau_D = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\beta}} = \frac{1}{0.7\sqrt{0.33}} \approx 2.45.$$

Bestäm slutligen förstärkningen K så att skärfrekvensen blir som önskad

$$|G_o(i0.7)| = \frac{K}{\sqrt{\beta}}|G(i0.7)| = 1,$$

vilket ger

$$K = \frac{\sqrt{0.33}}{0.3} = 1.915.$$

2. (a) Falskt. Med $G_o = \frac{s-b}{s+a}$ fås det slutna systemet

$$G_c = \frac{G_o}{1+G_o} = \frac{s-b}{s+a+s-b} = \frac{s-b}{2s+a-b},$$

vilket har en pol i $s = \frac{b-a}{2}$ som ej ligger i VHP om $b \geq a$.
2. (b) Falskt. Maxfasen beror endast på parametern β.
2. (c) Sant. Med $G_o = \frac{H(s)}{s}$, där $H(0) \neq 0$ får man känslighetsfunktionen

$$S(s) = \frac{1}{1+G_o} = \frac{s}{s+H(s)},$$

vilken har nollställe i origo.
2. (d) Falskt. Vi har likheten $S(i\omega)+T(i\omega) = 1$. Men enligt triangelolikheten gäller

$$|S(i\omega)| + |T(i\omega)| \geq |S(i\omega) + T(i\omega)| = 1.$$

Likhet gäller endast för frekvenser ω där $S(i\omega)$ och $T(i\omega)$ har samma argument (ligger på en linje inkluderande origo i det komplexa talplanet).
2. (e) Sant. Observerbarhet är ett av kriterierna för en minimal realisation. Den andra är styrbarhet.

3. (a) Signalen $w(t)$ är en vinkelhastighet, som integrerad ger teleskopets vinkel $\theta(t)$. Överföringsfunktionen från u och v till w blir

$$sW(s) = U + V - K_f W \quad \Leftrightarrow \quad W(s) = \frac{1}{s+K_f}\big(U+V\big).$$

Från u och v till θ får vi därmed

$$G_t(s) = \frac{1}{s(s+K_f)}.$$

3. (b) Vi får kretsförstärkningen

$$G_o(s) = F(s)G_t(s),$$

och alla slutna överföringsfunktioner har samma nämnare $1 + G_o(s) = 1 + F(s)G_t(s)$. Täljaren i överföringsfunktionen ges av det öppna systemet från respektive signal till utsignalen θ. Därför får vi

$$\begin{aligned}
G_r(s) &= \frac{F(s)G_t(s)}{1+F(s)G_t(s)} = \frac{F(s)}{s(s+K_f)+F(s)} \\
G_v(s) &= \frac{G_t(s)}{1+F(s)G_t(s)} = \frac{1}{s(s+K_f)+F(s)} \\
G_n(s) &= \frac{-F(s)G_t(s)}{1+F(s)G_t(s)} = -\frac{F(s)}{s(s+K_f)+F(s)}
\end{aligned}$$

3. (c) Karakteristiska ekvationen för det slutna systemet blir

$$s(s+2) + K\frac{2s+1}{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2(s+2) + K(2s+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow s^3 + 2s^2 + 2Ks + K = 0.$$

Med Rouths algoritm får vi

$$\begin{array}{ccc}
1 & 2K & 0 \\
2 & K & 0 \\
\frac{3K}{2} & 0 & 0 \\
K & 0 & 0
\end{array}$$

Alltså inga teckenväxlingar i första kolumnen om

$$K > 0.$$

3. (d) Då vi har $r(t) = 0$, så blir reglerfelet $e(t) = r(t) - y(t) = -y(t)$. Störningen v är en ramp med Laplace-transformen $V(s) = \frac{1}{s^2}$. Vi har redan räknat ut överföringsfunktionen från störningen v till utsignalen i deluppgift (b). Vi får därmed från slutvärdesteoremet

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} e(t) &= -\lim_{t\to\infty} y(t) = -\lim_{s\to 0} sY(s) = -\lim_{s\to 0} sG_v(s)V(s) \\
&= -\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s(s+2)+K\frac{2s+1}{s}}\frac{1}{s^2} = -\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2(s+2)+K(2s+1)} = -\frac{1}{K}.
\end{aligned}$$

3. (e) Slutna systemets beteende för olika värden på K: För låga värden på K har vi två poler i HHP och därmed instabilt system. När K växer något blir systemet stabilt, men relativt långsamt och oscillativt. Med ökande K

blir systemet snabbare och mer och mer oscillativt. Snabbheten begränsas dock av ändpunkterna i -0.5.

4. (a) Det övre blocket ger

$$(s+1)X_1(s) = U(s),$$

eller

$$\dot{x}_1 + x_1 = u \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x}_1 = -x_1 + 0x_2 + u.$$

Det nedre blocket ger

$$(s+3)X_2(s) = U(s) + D(s) + X_1(s),$$

eller

$$\dot{x}_2 + 3x_2 = u + d + x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x}_2 = x_1 - 3x_2 + u + d.$$

Vi kan nu ställa upp tillståndsmodellen:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x. \end{aligned}$$

4. (b) Med tillståndsåterkopplingen $u = -Lx$ får vi det slutna systemet

$$\dot{x} = Ax - BLx + B_d d = (A - BL)x + B_d d,$$

där

$$\begin{aligned} BL &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ l_1 & l_2 \end{bmatrix}, \\ A - BL &= \begin{bmatrix} -1 - l_1 & -l_2 \\ 1 - l_1 & -3 - l_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Det slutna systemets poler ges av egenvärdena till matrisen $A - BL$. Det karakterstiska polynomet för matrisen är

$$\begin{aligned} \det(sI - (A - BL)) &= \det \begin{bmatrix} s + 1 + l_1 & l_2 \\ -1 + l_1 & s + 3 + l_2 \end{bmatrix} = (s + 1 + l_1)(s + 3 + l_2) - l_2(l_1 - 1) \\ &= s^2 + (l_1 + 1 + l_2 + 3)s + (1 + l_1)(3 + l_2) - l_1 l_2 + l_2 \\ &= s^2 + (l_1 + l_2 + 4)s + 3l_1 + 2l_2 + 3. \end{aligned}$$

Jämför med koefficienterna i det önskade polynomet

$$(s+4)^2 = s^2 + 8s + 16,$$

vilket ger

$$\begin{aligned} l_1 + l_2 + 4 &= 8 \\ 3l_1 + 2l_2 + 3 &= 16 \end{aligned}$$

med lösningen

$$\begin{aligned} l_1 &= 5 \\ l_2 &= -1. \end{aligned}$$

4. (c)

Från uttrycket för det slutna systemet i (b), och $y = Cx$ får vi

$$\begin{aligned} Y(s) &= C\big(sI - (A - BL)\big)^{-1} B_d D(s) \\ &= C \begin{bmatrix} s+6 & -1 \\ 4 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} B_d D(s) \\ &= \frac{1}{(s+4)^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -4 & s+6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} D(s) \\ &= \frac{s+7}{(s+4)^2} D(s). \end{aligned}$$