TENTAMEN: DEL B
Reglerteknik I 5hp

Tid: Måndag 15 december 2014, kl. 14.00-17.00

Plats: Fyrislundsgatan 80, sal 1

Ansvarig lärare: Hans Norlander, tel. 018-4713070. Hans kommer och svarar på frågor ungefär kl 15.30.

Tillåtna hjälpmedel: Kursboken (Glad-Ljung), miniräknare, Laplace-tabell och matematisk formelsamling.

Skrivningen består av två delar, del A och del B. För att bli godkänd på skrivningen krävs att man är godkänd på del A.
Del B är frivillig och ges endast vid ordinarie tentatillfällen (vid respektive kurstillfällen.)
Preliminära betygsgränser:
Betyg 3: Godkänt på del A
Betyg 4: Godkänt på del A och minst 10 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)
Betyg 5: Godkänt på del A och minst 18 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)

<u>OBS:</u> Svar och lösningar lämnas in på separata papper. Endast en uppgift per ark. Skriv din tentakod på varje ark.

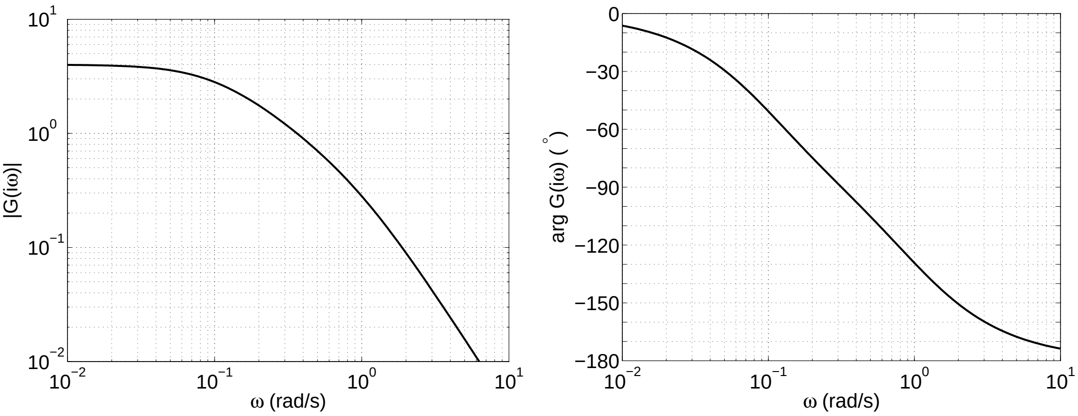
Lösningarna ska vara tydliga och väl motiverade (om inget annat anges). Avläsningar ur diagram behöver inte vara exakta.

GOD JUL & GOTT NYTT ÅR!

Uppgift 1 Man vill konstruera en farthållare till en bil och behöver därför en återkopplande regulator. Man utgår från modellen

$$Y(s) = G(s)U(s) \qquad \text{och styrlagen} \qquad U(s) = F(s)(Y_{ref}(s) - Y(s)).$$

Insignalen u är gaspådraget, och hastigheten är utsignalen y. Nedan visas bodediagrammet för $G(s)$:



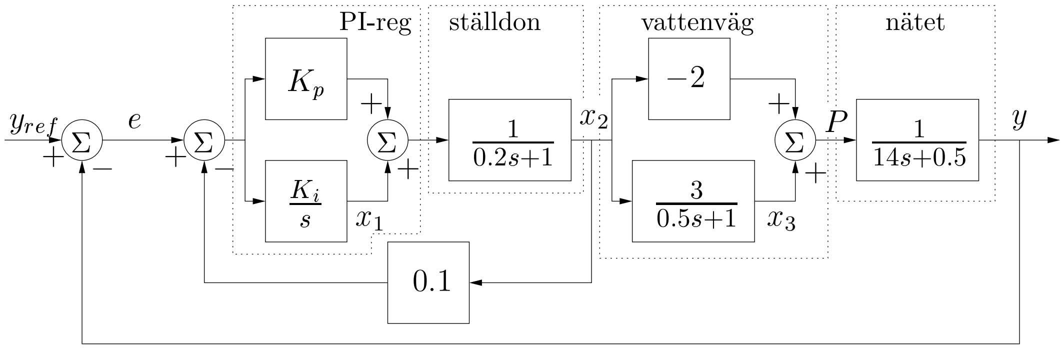
(a) Först provade man med proportionell återkoppling, $F(s) = K > 0$. Man ville ha fasmarginalen $\varphi_m \geq 45°$. Vilken är den högsta skärfrekvens ω_c man kan få då? **(1p)**

(b) Man valde den P-regulator som gav den högsta möjliga ω_c enligt (a). Hur stort blir då det kvarvarande felet, $\lim_{t\to\infty}(y_{ref}(t) - y(t))$, hos stegsvaret då y_{ref} är ett enhetssteg? **(1p)**

(c) För att få bort det kvarvarande felet helt provade man sedan med en rent integrerande återkoppling, $F(s) = \frac{K}{s}$, där $K > 0$. Vilken är den högsta skärfrekvens ω_c man kan få i detta fall, om man vill att $\varphi_m \geq 45°$? **(1p)**

(d) Dimensionera nu en regulator $F(s)$ sådan att stegsvarets kvarvarande fel försvinner helt, d.v.s. $\lim_{t\to\infty}(y_{ref}(t) - y(t)) = 0$, och att slutna systemet blir (ungefär) dubbelt så snabbt som med P-regleringen i (a) (d.v.s. så att stigtiden halveras). Fortfarande ska $\varphi_m \geq 45°$ gälla. **(2p)**

Uppgift 2 Blockdiagrammet nedan visar en enkel modell av frekvensreglering i ett vattenkraftverk. Frekvensreglering är nödvändigt för att generatorerna, som drivs av vattenflödet och genererar elektrisk effekt, är direkt (synkront) kopplade till kraftnätet, som ju ska hålla konstant 50 Hz. Om energikonsumtionen plötsligt ökar så belastas generatorerna mer och då sjunker nätfrekvensen under 50 Hz. För att motverka detta måste mer effekt genereras genom att öka vattenflödet genom vattenkraftverket.



Här är y nätfrekvensen, som ju ska ligga så nära $y_{ref} = 50$ Hz som möjligt, e är reglerfelet och P är effekten kraftverket levererar till kraftnätet. Regulatorn är en PI-regulator, med parametrarna K_p och K_i (i kombination med en sorts kaskadreglering, s.k. "droop").

(a) Ange överföringsfunktionen $G_c(s)$, från y_{ref} till y, för det slutna systemet.
Ledning: Räkna först ut överföringsfunktionen från e till x_2. **(2p)**

(b) Själva kraftverket består av de streckade blocken "ställdon" och "vattenväg", d.v.s. delen från PI-regulatorns utsignal till P i blockdiagrammet (bortse från återkopplingen från x_2). Avgör ifall kraftverket är ett minfassystem. **(1p)**

(c) Betrakta nu systemet från reglerfelet e till levererad effekt P. Ställ upp tillståndsbeskrivningen för systemet med tillståndsvektorn $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$, med tillståndsvariablerna x_1, x_2 och x_3 enligt blockdiagrammet, och med e som insignal och P som utsignal. **(2p)**

Uppgift 3 Ange för vart och ett av följande påståenden ifall det är sant eller falskt.

(a) För systemet $Y(s) = e^{-s}U(s)$ blir utsignalen $y(t) = \sin(t-1)$ om insignalen är $u(t) = \sin t$ för alla $t > -\infty$.

(b) För systemet $Y(s) = \frac{1}{s^3+1}U(s)$ blir utsignalen $y(t) = \sqrt{0.5}\sin(t+\pi/4)$ om insignalen är $u(t) = \sin t$ för alla $t > -\infty$.

(c) Systemen med överföringsfunktionerna $G_1(s) = e^{-s}$ och $G_2(s) = \frac{-s+1}{s+1}$ har identiska beloppkurvor i Bodediagrammet.

(d) Man ska alltid sträva efter att få känslighetsfunktionerna att uppfylla $|S(i\omega_c)| \le 0.33$ och $|T(i\omega_c)| \le 0.33$ vid skärfrekvensen ω_c.

(e) Vid framkoppling blir känslighetsfunktionen $S(s) = F_f(s)G_o(s)$, där $F_f(s)$ är framkopplingsfiltret och $G_o(s)$ är kretsförstärkningen.

Varje rätt svar ger +1 poäng och varje felaktigt svar ger -1 poäng (och utelämnat svar ger noll poäng). Totalt ger dock uppgiften minst 0 poäng. Ingen motivering behövs — enbart svaren 'sant' och 'falskt' kommer att beaktas. **(5p)**

Uppgift 4 Ett system har tillståndsbeskrivningen

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \overbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{=A} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t).\end{aligned}$$

(a) Bestäm matrisexponentialfunktionen e^{At} för systemets A-matris. **(1p)**

(b) Är tillståndsbeskrivningen asymptotiskt stabil? **(1p)**

(c) Är tillståndsbeskrivningen en minimal realisation? **(1p)**

(d) Bestäm systemets viktfunktion. **(1p)**

(e) Är systemet insignal-utsignalstabilt? **(1p)**

Lösningar till tentamen i Reglerteknik I 5hp, del B 2014-12-15

1. (a) Med $F(s) = K$ blir kretsförstärkningen $G_o(s) = F(s)G(s) = KG(s)$. För $\varphi_m \geq 45°$ krävs $\arg(G_o(i\omega_c)) \geq -135°$. Här blir $\arg(G_o(i\omega)) = \arg(KG(i\omega)) = \arg(G(i\omega)$, d.v.s. faskurvan för $G_o(s)$ blir identisk med den för $G(s)$. Från Bodediagrammet får vi $\arg(G(i\omega)) \geq -135°$ för $\omega \leq 1.2$ rad/s. Alltså är $\omega_c = 1.2$ rad/s den högsta möjliga skärfrekvensen.
(b) Med slutvärdessatsen fås

$$e_0 = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+KG(s)}\frac{1}{s} = \frac{1}{1+KG(0)}.$$

Från Bodediagrammet får vi $|G(i1.2)| = 0.2$, samt $G(0) = 4$. För att få $\omega_c = 1.2$ rad/s krävs att $1 = |G_o(i1.2)| = KG(i1.2) = 0.2K$, d.v.s. $K = 5$, vilket ger $e_0 = \frac{1}{1+5\cdot 4} = \frac{1}{21} \approx 0.048$.
(c) Med $F(s) = \frac{K}{s}$ blir $G_o(s) = \frac{K}{s}G(s)$, och $\arg(G_o(i\omega)) = \arg\left(\frac{K}{i\omega}G(i\omega)\right) = -90° + \arg(G(i\omega))$. För $\varphi_{\geq}45°$ krävs då $\arg(G(i\omega_c)) \geq -45°$. Bodediagrammet ger att $\arg(G(i\omega)) \geq -45°$ för $\omega \leq 0.085$ rad/s, och därför blir högsta möjliga skärfrekvens $\omega_c = 0.085$ rad/s.
(d) Dubbelt så snabbt som i (a) $\Rightarrow$ vill ha $\omega_c = 2\cdot 1.2 = 2.4$ rad/s. Bodediagrammet ger

$$|G(i2.4)| = 0.065, \qquad \text{och} \qquad \arg(G(i2.4)) = -155°.$$

Det är 25° kvar till −180°, och för att få $\varphi_m = 45°$ måste alltså $F(s)$ skjuta till 20° $\Rightarrow$ använd ett leadfilter. För att få $e_0 = 0$ krävs integralverkan $\Rightarrow$ använd ett lagfilter med $\gamma = 0$. För att kompensera också för lagfiltret måste leadfiltret ge $20° + 6° = 26°$ $\Rightarrow$ välj $\beta = 0.4$ (fig. 5.13). För att få φ_{max} vid ω_c väljs $\tau_D = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\beta}} = \frac{1}{2.4\sqrt{0.4}} = 0.66$. Slutligen, för att $\omega_c = 1.2$ rad/s ska bli skärfrekvens, välj K så att

$$1 = |G_o(i\omega_c)| = \frac{K}{\sqrt{\beta}}|G(i\omega_c)| \quad \Leftrightarrow \quad K = \frac{\sqrt{\beta}}{|G(i\omega_c)|} = \frac{\sqrt{0.4}}{0.065} = 9.73.$$

Leadfiltret blir $F_{lead}(s) = K\frac{\tau_D s+1}{\beta\tau_D s+1} = 9.73\frac{0.66s+1}{0.4\cdot 0.66s+1}$. Enligt tumregel väljs $\tau_I = \frac{10}{\omega_c} = \frac{10}{2.4} = 4.2$, och (enligt ovan) $\gamma = 0$, vilket ger lagfiltret som $F_{lag}(s) = \frac{\tau_I s+1}{\tau_I s+\gamma} = \frac{4.2s+1}{4.2s}$. Den totala regulatorn blir då $F(s) = F_{lead}(s)F_{lag}(s)$.

2. (a) Först $e \to x_2$:

$$\begin{aligned}
X_2(s) &= \frac{1}{0.2s+1}\cdot\frac{K_p s+K_i}{s}(E(s) - 0.1X_2(s)) \\
\Leftrightarrow \quad \left(1 + \frac{0.1(K_p s+K_i)}{s(0.2s+1)}\right)X_2(s) &= \frac{K_p s+K_i}{s(0.2s+1)}E(s)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad X_2(s) = \frac{\frac{K_p s+K_i}{s(0.2s+1)}}{1+\frac{0.1(K_p s+K_i)}{s(0.2s+1)}}E(s) = \underbrace{\frac{K_p s+K_i}{s(0.2s+1)+0.1(K_p s+K_i)}}_{=G_1(s)}E(s).$$

Vidare har vi att

$$Y(s) = \frac{1}{14s+0.5}\left(\frac{3}{0.5s+1} - 2\right) X_2(s) = \underbrace{\frac{-s+1}{(14s+0.5)(0.5s+1)}}_{=G_2(s)} X_2(s).$$

Eftersom $E(s) = Y_{ref}(s) - Y(s)$ får vi

$$Y(s) = G_2(s)G_1(s)(Y_{ref}(s) - Y(s)) \quad \Leftrightarrow$$

$$(1+G_2(s)G_1(s))Y(s) = G_2(s)G_1(s)Y_{ref}(s) \quad \Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{G_2(s)G_1(s)}{1+G_2(s)G_1(s)}Y_{ref}(s).$$

Alltså är slutna systemets överföringsfunktion

$$G_c(s) = \frac{G_2(s)G_1(s)}{1+G_2(s)G_1(s)} = \frac{\frac{-s+1}{(14s+0.5)(0.5s+1)} \cdot \frac{K_p s + K_i}{s(0.2s+1)+0.1(K_p s+K_i)}}{1 + \frac{-s+1}{(14s+0.5)(0.5s+1)} \cdot \frac{K_p s+K_i}{s(0.2s+1)+0.1(K_p s+K_i)}}$$

$$= \frac{(-s+1)(K_p s + K_i)}{(14s+0.5)(0.5s+1)[s(0.2s+1)+0.1(K_p s+K_i)] + (-s+1)(K_p s+K_i)}.$$

(b) Överföringsfunktionen för ställdon + vattenväg är

$$\left(\frac{3}{0.5s+1} - 2\right)\frac{1}{0.2s+1} = \frac{-s+1}{0.5s+1} \cdot \frac{1}{0.2s+1}.$$

Den har ett nollställe i +1, d.v.s. i HHP, och därför är det ett icke-minfassystem (Res. 5.1).

(c) Från blockdiagrammet fås

$$X_1(s) = \frac{K_i}{s}(E(s) - 0.1X_2(s)) \quad \Leftrightarrow$$

$$sX_1(s) = -0.1K_iX_2(s) + K_iE(s) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x}_1 = -0.1K_ix_2 + K_ie,$$

$$X_2(s) = \frac{1}{0.2s+1}(X_1(s) + K_p(E(s) - 0.1X_2(s)))$$

$$\Leftrightarrow \quad (0.2s+1)X_2(s) = X_1(s) - 0.1K_pX_2(s) + K_pE(s)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0.2sX_2(s) = X_1(s) - (1+0.1K_p)X_2(s) + K_pE(s)$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{x}_2 = 5x_1 - (5+0.5K_p)x_2 + 5K_pe,$$

$$X_3(s) = \frac{3}{0.5s+1}X_2(s) \quad \Leftrightarrow \quad (0.5s+1)X_3(s) = 3X_2(s)$$

$$\Leftrightarrow \quad 0.5sX_3(s) = 3X_2(s) - X_3(s) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x}_3 = 6x_2 - 2x_3,$$

$$P(s) = -2X_2(s) + X_3(s) \quad \Leftrightarrow \quad P = -2x_2 + x_3.$$

Med $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$ blir det

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1K_i & 0 \\ 5 & -(5+0.5K_p) & 0 \\ 0 & 6 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} K_i \\ 5K_p \\ 0 \end{bmatrix} e,$$
$$P = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} x.$$

3. **(a)** Sant (”sinus in–sinus ut”); **(b)** Falskt (systemet är instabilt); **(c)** Sant ($|G_1(i\omega)| = |G_2(i\omega)| = 1$); **(d)** Falskt ($S(s)+T(s) \equiv 1 \Rightarrow |S(i\omega)|+|T(i\omega)| \geq 1$); **(e)** Falskt (Definition: $S(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)}$).

4. **(a)** Utnyttja att $e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]$:

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \quad e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 1-e^{-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Res. 8.6: Asymptotisk stabilitet $\Leftrightarrow$ alla egenvärden till A ligger strikt i VHP. Här är As karakteristiska polynom $\det(sI-A) = s(s+1)$, d.v.s. poler/egenvärden i origo och -1. Polen i origo gör att systemet ej är asymptotiskt stabilt.

(c) Res. 8.11: Minimal realisation $\Leftrightarrow$ systemet både styrbart och observerbart. Här är systemet på styrbar kanonisk form (Res. 8.1) $\Rightarrow$ styrbart (Res. 8.10). Observerbarhetsmatrisen är

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{O}$ har uppenbarligen inte full rang $\Rightarrow$ ej observerbart (Res. 8.9) $\Rightarrow$ ej en minimal realisation.

(d) För viktfunktionen gäller

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[C(sI-A)^{-1}B] = Ce^{At}B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 1-e^{-t} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1.$$

(e) $\int_0^\infty |g(t)| dt = \int_0^\infty 1 dt = \infty \Rightarrow$ ej insignal-utsignalstabilt (Res. 2.1). (Går också bra att använda Res. 2.2 och $G(s)$.)