TENTAMEN: DEL A
Reglerteknik I 5hp

Tid: Torsdag 17 december 2015, kl. 8.00-11.00

Plats: Fyrislundsgatan 80, sal 1

Ansvarig lärare: Hans Norlander, tel. 018-4713070.

Tillåtna hjälpmedel: Kursboken (Glad-Ljung), miniräknare, Laplace-tabell och matematisk formelsamling.

Examinationen består av två delar, del A och del B. För att bli godkänd krävs att man är godkänd på del A, och för detta krävs godkänt på varje uppgift. Del B är frivillig och ges endast vid ordinarie tentatillfällen (vid respektive kurstillfällen).

Preliminära betygsgränser:
Betyg 3: Godkänt på del A
Betyg 4: Godkänt på del A och minst 10 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)
Betyg 5: Godkänt på del A och minst 18 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)

OBS: Svar och lösningar/motiveringar ska skrivas på angiven plats i detta provhäfte, och provhäftet ska lämnas in.
Lösningarna ska vara tydliga och väl motiverade (om inget annat anges).

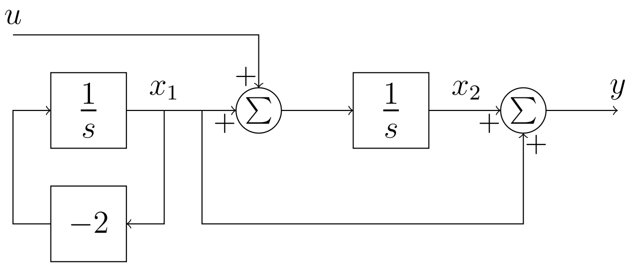
LYCKA TILL!

Tentamenskod	
Utbildningsprogram	Termin och år då du först registrerades på kursen
Bordsnummer	Klockslag för inlämning

Resultat:

Uppg. 1	**Uppg. 2**	**Uppg. 3**	**Del A**
G/U	G/U	G/U	G/U

Uppgift 1 Blockschemat nedan representerar ett system.



(a) Ställ upp tillståndsbeskrivningen för systemet ovan, med u som insignal och y som utsignal. Använd $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ som tillståndsvektor, med x_1 och x_2 enligt blockschemat.

Svar och lösning:

(b) Ange ifall tillståndsbeskrivningen i (a) är en *minimal realisation* eller inte. **Svar:**____

Motivering:

(c) För att kunna skatta tillståndsvektorn x i systemet ovan behöver man konstruera en observatör. Bestäm observatörsförstärkningen, $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}^T$, så att båda observatörspolerna hamnar i -2 (en dubbelpol).

Svar:____________________________

Lösning:

Uppgift 2

(a) Man gör stegsvarsexperiment för fyra olika system, med överföringsfunktionerna

$$G_1(s) = \frac{1}{0.25s^2 + s + 1},\ G_2(s) = \frac{25}{(s+1)^2 + 24},\ G_3(s) = \frac{1}{0.5s^2 + s + 1},\ G_4(s) = \frac{1}{2s^2 + 2s + 1}.$$

Ange vilket av systemen G_1–G_4 som har *störst* överslång M. **Svar:**____________

Vilket system har *längst* stigtid T_r? **Svar:**____________

Motivering:

(b) Systemet $Y(s) = \frac{1}{(s+1)^3}U(s)$ återkopplas med proportionell återkoppling, $u(t) = K(r(t) - y(t))$. Ange för vilka $K \in \mathbb{R}$ det slutna systemet är stabilt. **Svar:**______________________

Lösning:

(c) Bestäm det kvarvarande reglerfelet, d.v.s. $\lim_{t\to\infty}(r(t) - y(t))$, för det *slutna* systemet i (b) då $r(t)$ är ett enhetssteg. **Svar:**__________________________

Lösning:

Uppgift 3

(a) En av de absolut vanligast förekommande regulatortyperna i återkopplade system i industriella processer är *PID-regulatorn.* Den ideala, teoretiska PID-regulatorn kan beskrivas med överföringsfunktionen

$$F_{PID}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s.$$

Men vad står förkortningen PID för i detta sammanhang? *Markera* vilket av förslagen 1–4 nedan som är den korrekta uttydelsen av PID.

1. $\underline{\text{p}}$rocess$\underline{\text{i}}$ndustriell $\underline{\text{d}}$igitalstyrning
2. $\underline{\text{p}}$rimär $\underline{\text{i}}$nkrementell $\underline{\text{d}}$atabehandling
3. $\underline{\text{p}}$roportionell, $\underline{\text{i}}$ntegrerande, $\underline{\text{d}}$eriverande
4. $\underline{\text{p}}$rocess$\underline{\text{id}}$entifiering

Ev. motivering (ej nödvändig):

(b) Man dimensionerar en regulator för ett system utifrån modellen $G(s)$, och får då den *komplementära känslighetsfunktionen*

$$T(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Det *verkliga* systemet är dock

$$G^0(s) = G(s)(1 + \Delta_G(s)),$$

där $\Delta_G(s)$ är det *relativa modellfelet.*

Om man vet att $|\Delta_G(i\omega)| < 0.8$ för alla ω, vad kan man då i detta fall säga om stabiliteten för det *verkliga* återkopplade systemet? **Ringa in** den korrekta slutsatsen nedan.

Det är stabilt. *Det går ej avgöra.* *Det är instabilt.*

Motivering (krävs):

Vid behov kan du fortsätta dina lösningar/motiveringar på detta ark. Markera tydligt vilken uppgift som avses.

Lösningar till tentamen i Reglerteknik I 5hp 2015-12-17

1. (a) Från blockschemat fås

$$X_1(s) = \frac{1}{s}(-2X_1(s)) \quad \Leftrightarrow \quad sX_1(s) = -2X_1(s) \quad \overset{\mathcal{L}}{\Leftrightarrow} \quad \dot{x}_1 = -2x_1,$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s}(X_1(s) + U(s)) \quad \Leftrightarrow \quad sX_2(s) = X_1(s) + U(s) \quad \overset{\mathcal{L}}{\Leftrightarrow} \quad \dot{x}_2 = x_1 + u,$$

vilket tillsammans med $y = x_1 + x_2$ ger

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u, \\ y = x_1 + x_2, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x. \end{cases}$$

(b) En minimal realisation är både styrbar och observerbar (Res. 8.11). Undersök styrbarhets- och observerbarhetsmatriserna:

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\text{ej}} \text{ full rang},$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{full rang}.$$

Systemet är alltså observerbart men ej styrbart, och därför ej en minimal realisation.

(c) Observatörspolynomet är

$$\det(sI - A + KC) = \det \begin{bmatrix} s + 2 + k_1 & k_1 \\ -1 + k_2 & s + k_2 \end{bmatrix}$$
$$= (s + 2 + k_1)(s + k_2) - k_1(-1 + k_2) = s^2 + (2 + k_1 + k_2)s + k_1 + 2k_2.$$

Det önskade observatörspolynomet är $(s + 2)^2 = s^2 + 4s + 4$. Identifiering av koefficienter ger

$$\begin{cases} 2 + k_1 + k_2 = 4, \\ k_1 + 2k_2 = 4, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} k_1 = 0, \\ k_2 = 2, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad K = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2. (a) Jämför med $G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$: T_r är omvänt proportionell mot ω_0 (polernas avstånd från origo), M ökar när ζ ($= \cos\phi$, där ϕ är vinkeln ner till negativa reella axeln) minskar — se exempel 3.3 i Glad/Ljung. Här har vi

$$\begin{aligned}
G_1 :& \quad 0.25s^2 + s + 1 = 0.25(s^2 + 4s + 4) && \Leftrightarrow \quad \omega_0 = 2,\ \zeta = 1 \\
G_2 :& \quad (s + 1)^2 + 24 = s^2 + 2s + 25 && \Leftrightarrow \quad \omega_0 = 5,\ \zeta = 0.2 \\
G_3 :& \quad 0.5s^2 + s + 1 = 0.5(s^2 + 2s + 2) && \Leftrightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{2},\ \zeta = \sqrt{0.5} \\
G_4 :& \quad 2s^2 + 2s + 1 = 2(s^2 + s + 0.5) && \Leftrightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{0.5},\ \zeta = \sqrt{0.5}
\end{aligned}$$

Störst $M \leftrightarrow$ minst $\zeta \leftrightarrow G_2$. Längst $T_r \leftrightarrow$ minst $\omega_0 \leftrightarrow G_4$.
(b) Det slutna systemet blir

$$Y(s) = \frac{\frac{K}{(s+1)^3}}{1 + \frac{K}{(s+1)^3}} R(s) = \frac{K}{(s+1)^3 + K} R(s) = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K} R(s).$$

Med Rouths algoritm fås villkor på K för stabilitet:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1+K & 0 \\ 3 - \frac{1+K}{3} & 0 & \\ 1+K & & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} 3 - \dfrac{1+K}{3} > 0 & \Leftrightarrow & K < 8 \\ 1+K > 0 & \Leftrightarrow & K > -1 \end{array}$$

Alltså är slutna systemet stabilt för $-1 < K < 8$.
(c) Använd slutvärdesteoremet:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sS(s)\frac{1}{s} = S(0),$$

där

$$S(s) = 1 - G_c(s) = 1 - \frac{K}{(s+1)^3 + K} = \frac{(s+1)^3}{(s+1)^3 + K} \quad \Rightarrow \quad S(0) = \frac{1}{1+K}.$$

3. (a) Nr. 3: proportionell, integrerande, deriverande.
(b) Här $T(s)$ stabil, och

$$|T(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}} \le 1 < \frac{1}{0.8} < \frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|}, \qquad \forall \omega,$$

så enligt Resultat 6.2 är då det verkliga slutna systemet garanterat stabilt.