TENTAMEN: DEL B
Reglerteknik I 5hp

Tid: Torsdag 17 december 2015, kl. 14.00-17.00

Plats: Fyrislundsgatan 80, sal 1

Ansvarig lärare: Hans Norlander, tel. 018-4713070. Hans kommer och svarar på frågor ungefär kl 15.30.

Tillåtna hjälpmedel: Kursboken (Glad-Ljung), miniräknare, Laplace-tabell och matematisk formelsamling.

Skrivningen består av två delar, del A och del B. För att bli godkänd på skrivningen krävs att man är godkänd på del A.
Del B är frivillig och ges endast vid ordinarie tentatillfällen (vid respektive kurstillfällen.)
Preliminära betygsgränser:
Betyg 3: Godkänt på del A
Betyg 4: Godkänt på del A och minst 10 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)
Betyg 5: Godkänt på del A och minst 18 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)

OBS: Svar och lösningar lämnas in på separata papper. Endast en uppgift per ark. Skriv din tentakod på varje ark.

Lösningarna ska vara tydliga och väl motiverade (om inget annat anges). Avläsningar ur diagram behöver inte vara exakta.

LYCKA TILL!

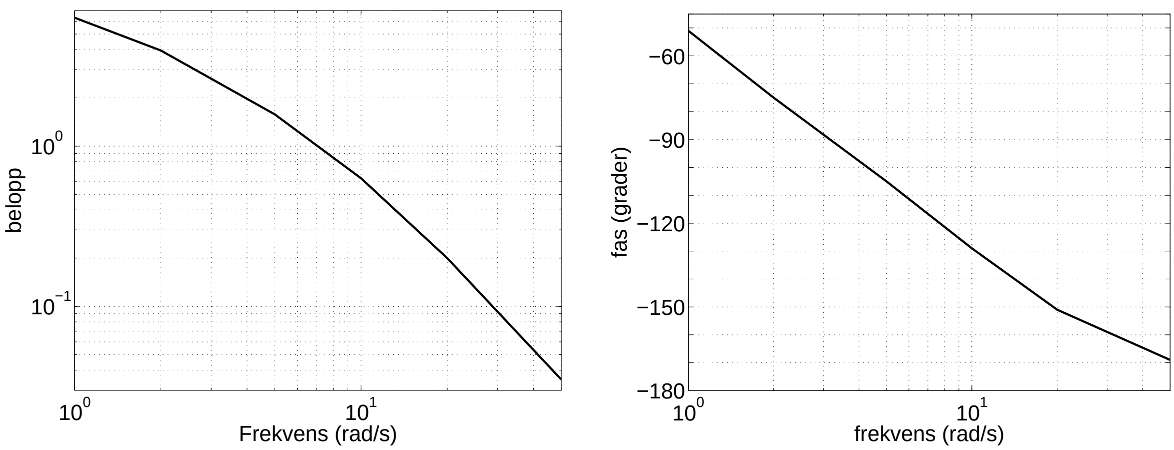
Uppgift 1 Annika och Tommy har hittat en gammal skivspelare samt ett antal vinylskivor på vinden, och de vill gärna kunna spela de gamla skivorna. Problemet är att skivspelaren bara har en rotationshastighet på skivtallriken. Bland skivorna finns det både singlar och LP-skivor, och dessa kräver ju två olika rotationshastigheter. Därför modifierar Annika och Tommy skivspelaren så att den går att styra med återkoppling.

Tommy försöker först med styrlagen

$$u(t) = y_{ref}(t) - y(t)$$

och gör ett stegsvarsexperiment. Rotationshastigheten y når till slut upp till 90% av y_{ref}, och stigtiden är lite för lång. Överslängen är dock acceptabel.

Annika gör då en serie ”sinus in–sinus ut”-experiment för att mäta upp skivspelarens frekvenssvar. Resultatet av detta redovisas i Bodediagrammet nedan:



(a) Vad är skivspelarens statiska förstärkning (från u till y)? **(1p)**

(b) Annika och Tommy vill styra skivspelaren med en enkel och billig mikroprocessor, och därför bör regulatorn vara enklast tänkbara. Hjälp Annika och Tommy att konstruera en regulator av så låg ordning som möjligt så att följande önskemål uppfylls:

1. slutna systemet är dubbelt så snabbt som med $u = y_{ref} - y$,
2. stegsvaret har samma översläng som för $u = y_{ref} - y$,
3. $y = y_{ref}$ i stationäritet, och
4. regulatorns förstärkning för höga frekvenser är inte större än nödvändigt.

(4p)

Uppgift 2 Ett system beskrivs av tillståndsmodellen

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t), \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t), \end{cases}$$

där v är en störning. Systemet ska styras med tillståndsåterkopplingen

$$u(t) = -Lx(t) + mr(t), \qquad L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm L och m i styrlagen ovan så att det slutna systemet får sina poler i -2 och -3, samt att $y = r$ i stationärt tillstånd då referenssignalen r är ett steg. **(2p)**

(b) Bestäm överföringsfunktionen från störningen v till utsignalen y för det slutna systemet då tillståndsåterkopplingen i (a) används. Bestäm också $\lim_{t\to\infty} y(t)$ för det slutna systemet, då $r(t) = 0$ och $v(t)$ är ett enhetssteg. **(2p)**

(c) Går det att hitta ett $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}$ sådant att $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ när $r(t) = 0$ och $v(t)$ är ett enhetssteg? Föreslå i så fall ett sådant L, eller vissa att det inte är möjligt. **(1p)**

Uppgift 3 En klassisk metod för att ställa in regulatorparametrarna för en PID-regulator på experimentell väg är Ziegler-Nichols metod. Den bygger på att man först använder proportionell återkoppling, $u = K(r - y)$. Under experimentet ökar man försiktigt förstärkningen K tills det slutna systemet börjar självsvänga med en konstant amplitud. Man noterar då värdet på K samt självsvängningens frekvens, och dessa värden används sedan för att bestämma PID-regulatorns parametrar. Anta nu att ett sådant experiment görs för systemet

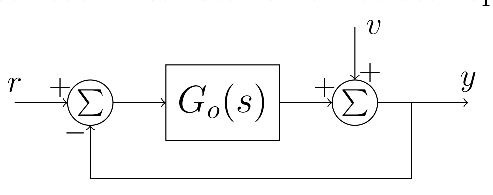
$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)^3} U(s).$$

D.v.s., styrlagen $u = K(r - y)$ används, och för $K = K_1$ börjar slutna systemet att självsvänga med vinkelfrekvensen ω_1.

(a) Bestäm K_1. **(2p)**

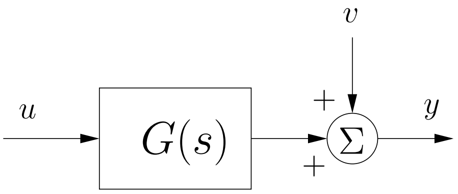
(b) Vad blir ω_1? **(1p)**

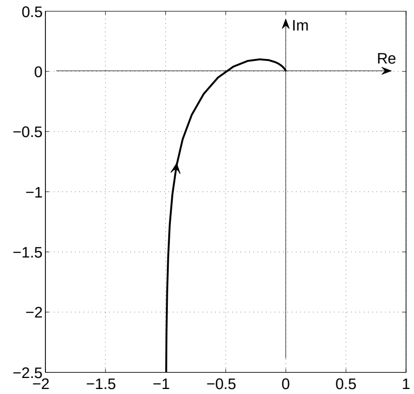
(c) Blockdiagrammet nedan visar ett helt annat återkopplat system.

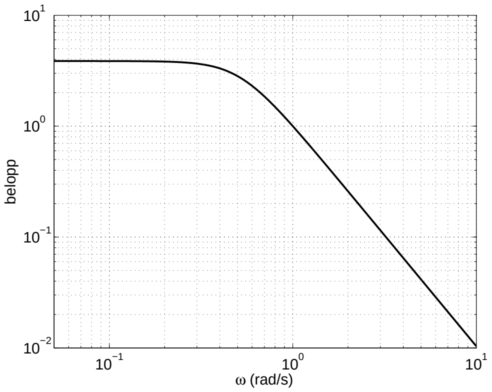


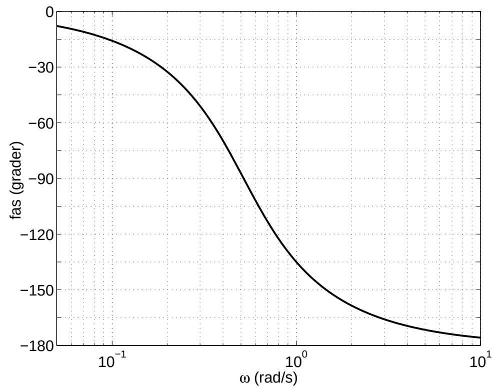
Kretsförstärkningen har skärfrekvensen ω_c och fasmarginalen $\varphi_m = 60°$. Då $r = 0$ och $v(t) = \sin \omega_c t$ blir även y en sinussvängning med vinkelfrekvensen ω_c. Bestäm *amplituden* för sinussvängningen på y. **(2p)**

Uppgift 4 I blockdiagrammet visas ett system med en störning v som kommer in additivt på utsignalen. Nyquistkurvan uppe till höger visar frekvenssvaret $G_1(i\omega)$, och Bodediagrammet underst visar belopp och fas för frekvenssvaret $G_2(i\omega)$. Varken G_1 eller G_2 har poler i höger halvplan.









Ange för vart och ett av följande påståenden ifall det är sant eller falskt.

(a) $G_1(s)$ och $G_2(s)$ är identiska, d.v.s. Nyquistkurvan och Bodediagrammet visar samma frekvenssvar.

(b) Då G_1 (i Nyquistkurvan) styrs med styrlagen $U(s) = K(Y_{ref}(s) - Y(s))$ är det slutna systemet stabilt för $0 < K < 2$.

(c) Då G_2 (i Bodediagrammet) styrs med styrlagen $U(s) = Y_{ref}(s) - Y(s)$ blir skärfrekvensen $\omega_c = 1$ rad/s, och fasmarginalen $\varphi_m = 45°$.

(d) Anta att $G = G_2$, att $v =$ konstant, och att $U(s) = F(s)(Y_{ref}(s) - Y(s))$, där $F(s)$ är ett lead-lagfilter. Då krävs att lagfiltrets $\gamma = 0$ för att uppnå $y = 0$ i stationäritet (då $y_{ref} = 0$).

(e) Anta igen att $G = G_2$, att $v =$ konstant, och att v är mätbar. Då räcker det med framkopplingen $u(t) = -v(t)$ för att uppnå $y = 0$ i stationäritet (då $y_{ref} = 0$).

Varje rätt svar ger +1 poäng och varje felaktigt svar ger -1 poäng (och utelämnat svar ger noll poäng). Totalt ger dock uppgiften minst 0 poäng. Ingen motivering behövs — enbart svaren 'sant' och 'falskt' kommer att beaktas. **(5p)**

Lösningar till tentamen i Reglerteknik I 5hp, del B 2015-12-17

1. (a) Med $u = y_{ref} - y$ blir kretsförstärkningen $G_o(s) = G(s)$ och det slutna systemet $Y(s) = G_c(s)Y_{ref}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}Y_{ref}(s)$. Vi vet att $G_c(0) = 0.9 \Rightarrow$

$$0.9 = \frac{G(0)}{1+G(0)} \quad \Leftrightarrow \quad 0.9(1+G(0)) = G(0) \quad \Leftrightarrow \quad G(0) = 0.9/0.1 = 9.$$

(b) För att få $y = y_{ref}$ krävs integralverkan, och $G(s)$ har inte det så det måste regulatorn $F(s)$ ha $\Rightarrow$ använd ett lagfilter (en PI-regulator) $F_{lag}(s) = \frac{\tau_I s+1}{\tau_I s+\gamma}$. Dubbelt så snabbt men samma översläng som med $u = y_{ref} - y \Rightarrow$ fördubbla skärfrekvensen ω_c men behåll fasmarginalen φ_m.

Med $F(s) = 1$ blir skärfrekvensen 7 rad/s och fasmarginalen 63°. Vi vill alltså ha $\omega_c = 2 \cdot 7 = 14$ rad/s och $\varphi_m = 63°$. Från Bodediagrammet får vi att $|G(i14)| = 0.36$ och $\arg G(i14) = -140°$. Regulatorn måste alltså skjuta till $23° + 6° = 29° \Rightarrow$ använd ett leadfilter $F_{lead}(s) = K\frac{\tau_D s+1}{\beta\tau_D s+1}$.

Fig. 5.13 $\Rightarrow$ välj $\beta = 0.34$. För att få maxfas vid ω_c väljs $\tau_D = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\beta}} = \frac{1}{14\sqrt{0.34}} = 0.0416$. För att $\omega_c = 1$ rad/s ska bli skärfrekvens:

$$1 = |G_o(i\omega_c)| = \frac{K}{\sqrt{\beta}}|G(i\omega_c)| \quad \Leftrightarrow \quad K = \frac{\sqrt{\beta}}{|G(i\omega_c)|} = \frac{\sqrt{0.34}}{0.36} = 1.62.$$

Leadfiltret blir

$$F_{lead}(s) = 1.62\frac{0.0416s+1}{0.34 \cdot 0.0416s+1}.$$

För lagfiltret väljs $\gamma = 0$ för att få integralverkan, och $\tau_I = \frac{10}{\omega_c} = \frac{10}{14} = 0.71$ enligt tumregel. Lagfiltret blir

$$F_{lag}(s) = \frac{0.71s+1}{0.71s}.$$

Lagfiltret behövs för krav 3, leadfiltret behövs för kraven 1 och 2. Därmed är $F(s) = F_{lead}(s)F_{lag}(s)$. För att tillgodose krav 4 ska β inte väljas mindre än nödvändigt. Detta $F(s)$ är då av så låg ordning som möjligt.

2. (a) Systemet står på styrbar kanonisk form (med avseende på u), så på en gång fås att

$$Y(s) = G(s)U(s), \qquad \text{med} \quad G(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}.$$

Det slutna systemet, från r till y, blir då

$$Y(s) = G_c(s)mR(s) = \frac{m(s+1)}{(s+2)(s+3)}R(s),$$

eftersom $G_c(s)$ får samma täljare som $G(s)$, och de önskade polerna är -2 och -3. För att få $y = r$ stationärt måste $mG_c(0) = 1$ gälla. Alltså bör vi välja $m = 6$.

Det slutna systemets polpolynom blir

$$\det(sI - A + BL) = \det\left\{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$
$$= \det\begin{bmatrix} s+1+l_1 & 1+l_2 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s^2 + (1+l_1)s + 1 + l_2.$$

Jämför med det önskade polpolynomet, $(s+2)(s+3) = s^2 + 5s + 6$, och identifiera koefficienter:

$$\begin{cases} 1 + l_1 = 5, \\ 1 + l_2 = 6 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} l_1 = 4, \\ l_2 = 5. \end{cases}$$

Tillståndsåterkopplingen blir alltså

$$u(t) = -\begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} x(t) + 6r(t).$$

(b) Det slutna systemet blir

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BL)x + Bmr + Nv, \\ y = Cx \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$
$$Y(s) = \underbrace{C(sI - A + BL)^{-1}Bm}_{=G_c(s)m} R(s) + \underbrace{C(sI - A + BL)^{-1}N}_{=G_v(s)} V(s).$$

Det är alltså $G_v(s)$ som söks, och den blir

$$G_v(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1+l_1 & 1+l_2 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s + l_1 - l_2}{s^2 + (1+l_1)s + 1 + l_2} = \frac{s-1}{s^2 + 5s + 6}.$$

Med slutvärdesteoremet fås sedan att

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sG_v(s)\frac{1}{s} = G_v(0) = -\frac{1}{6}.$$

(c) Från (b) har vi att

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = G_v(0) = \frac{l_1 - l_2}{1 + l_2}.$$

Man får $G_v(0) = 0$ då $l_1 = l_2$, t.ex. för $l_1 = l_2 = 3$ (vilket ger polpolynomet $s^2 + 4s + 4 = (s+2)^2$).

3. (a) Man kan lösa ut K_1 m.h.a. Rouths algoritm, men det är enklast att lösa ut K_1 och ω_1 (d.v.s. (a) och (b)) samtidigt. Detta går att göra på åtminstone två sätt:

Metod 1: Självsvängning innebär att slutna systemet har poler på imaginära axeln, i $\pm i\omega_1$. Slutna systemets poler ges av $0 = 1 + G_o(s)$, d.v.s.

$$0 = 1 + \frac{K_1}{s(s+1)^3} \quad\Leftrightarrow\quad 0 = s(s+1)^3 + K_1 = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + s + K_1.$$

Sätt in $s = i\omega$ för att lösa ut polerna på Im-axeln:

$$0 = (i\omega)^4 + 3(i\omega)^3 + 3(i\omega)^2 + i\omega + K_1 = \omega^4 - 3\omega^2 + K_1 + i\omega(1 - 3\omega^2)$$

För att högerledet ska bli noll måste både realdelen och imaginärdelen bli noll. Imaginärdelen blir noll för $3\omega^2 = 1 \Leftrightarrow \omega = (\pm)\frac{1}{\sqrt{3}}$. Insatt i realdelen ger det att $K_1 = 3\omega^2 - \omega^4 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$. Alltså, $K_1 = \frac{8}{9}$ och $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Metod 2: Självsvängning innebär att $G_o(i\omega_1) = -1$, vilket i sin tur innebär att

$$|G_o(i\omega_1)| = 1 \qquad \text{och} \qquad \arg G_o(i\omega_1) = -\pi.$$

Här blir $G_o(s) = \frac{K_1}{s(s+1)^3}$ så

$$-\pi = \arg G_o(i\omega_1) = -\frac{\pi}{2} - 3\arctan\omega_1 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_1 = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

och

$$1 = |G_0(i\omega_1)| = \frac{K_1}{\omega_1\left(\sqrt{\omega_1^2+1}\right)^3} \quad \Leftrightarrow \quad K_1 = \omega_1\left(\sqrt{\omega_1^2+1}\right)^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{\frac{1}{3}+1}\right)^3 = \frac{8}{9}.$$

Igen får vi att $K_1 = \frac{8}{9}$ och $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
(b) Från (b) har vi att $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
(c) Slutna systemet: $Y(s) = T(s)R(r) + S(s)V(s)$. "Sinus in–sinus ut" $\Rightarrow$ amplituden blir $|S(i\omega_c)|$. Eftersom $|1 + G_o(i\omega_c)| = |G_o(i\omega_c) - (-1)| = 2\sin\frac{\varphi_m}{2}$ (= avståndet mellan punkten -1 och Nyquistkurvans skärning med enhetscirkeln) får vi

$$|S(i\omega_c)| = \frac{1}{|1 + G_o(i\omega_c)|} = \frac{1}{2\sin\frac{\varphi_m}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{6}} = 1.$$

Amplituden på y är alltså 1.

4. (a) Falskt (se t.ex. fasen: för G_1 går den från $-90°$ till $-270°$, för G_2 går den från $0°$ till $-180°$);
(b) Sant (Nyquistkurvan, $KG_1(i\omega)$, skär negativa Re-axeln i $-0.5K$);
(c) Sant (kretsförstärkningen blir $G_o(s) = G_2(s)$, och $|G_2(i)| = 1$ och $\arg G_2(i) = -135°$);
(d) Sant (Här krävs $S(0) = 0$, vilket kräver att $G_o(s)$ har integralverkan, och eftersom G_2 ej har det måste F ha det, och det uppnås med $\gamma = 0$);
(e) Falskt (här bli $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s(V(s) - G_2(s)V(s)) = (1 - G_2(0))V \neq 0$ eftersom $G_2(0) \approx 4$);