TENTAMEN: DEL A
Reglerteknik I 5hp

Tid: Måndag 19 augusti 2013, kl. 14.00-17.00

Plats: Polacksbackens skrivsal

Ansvarig lärare: Hans Norlander, tel. 018-4713070.

Tillåtna hjälpmedel: Kursboken (Glad-Ljung), miniräknare, Laplace-tabell och matematisk formelsamling.

Examinationen består av två delar, del A och del B. För att bli godkänd krävs att man är godkänd på del A, och för detta krävs godkänt på varje uppgift. Del B är frivillig och ges endast vid ordinarie tentatillfällen (vid respektive kurstillfällen).

Preliminära betygsgränser:
Betyg 3: Godkänt på del A
Betyg 4: Godkänt på del A och minst 10 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)
Betyg 5: Godkänt på del A och minst 18 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)

OBS: Svar och lösningar/motiveringar ska skrivas på angiven plats i detta provhäfte, och provhäftet ska lämnas in.
Lösningarna ska vara tydliga och väl motiverade (om inget annat anges).

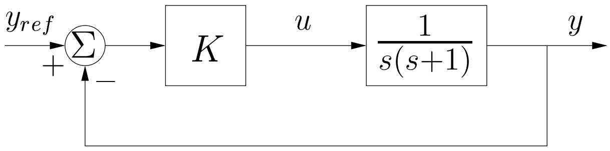
LYCKA TILL!

Tentamenskod (alt. namn och personnummer)	
Utbildningsprogram	Termin och år då du först registrerades på kursen
Bordsnummer	Klockslag för inlämning

Resultat:

Uppg. 1	**Uppg. 2**	**Uppg. 3**	**Del A**
G/U	G/U	G/U	G/U

Uppgift 1 Blockschemat nedan visar ett system som styrs med proportionell återkoppling.



(a) För vilka $K \in \mathbb{R}$ är det slutna systemet stabilt?

Svar:______________________________

Lösning:

(b) Vad blir den *statiska förstärkningen* från referenssignalen y_{ref} till utsignalen y för det slutna systemet?

Svar:______________________________

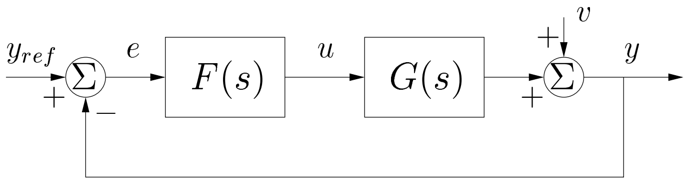
Lösning:

(c) Bestäm förstärkningen K så att, för stegsvaret för det slutna systemet, stigtiden T_r blir så liten som möjligt och överslängen $M \leq 5\%$.

Svar:______________________________

Lösning:

Uppgift 2 Ett system styrs med återkoppling från reglerfelet e, se blockschemat nedan. En störning v kommer in additivt på utsignalen.



Det återkopplade systemet har känslighetsfunktionen

$$S(s) = \frac{s^2 + 5s + 1}{s^2 + 5s + 10}.$$

(a) Bestäm $\lim_{t\to\infty} y(t)$ då $v(t)$ är ett enhetssteg och $y_{ref}(t) = 0$.

Svar:______________________________

Lösning:

(b) Vad blir överföringsfunktionen från y_{ref} till y för det slutna systemet?

Svar:______________________________

Lösning:

(c) Det *verkliga* systemet är $G^0(s) = G(s)(1 + \Delta_G(s))$, där $\Delta_G(s)$ är det *relativa modellfelet*. Här gäller att den komplementära känslighetsfunktionen $T(s)$ (för modellen) är stabil, och att $|T(i\omega)| \leq 0.9$ för alla ω. Om man vet att $|\Delta_G(i\omega)| < 1$ för alla ω, vad kan man då säga om stabiliteten för det *verkliga* slutna systemet? **Ringa in** rätt alternativ.

Det är stabilt *Det är instabilt* *Går ej att avgöra*

Motivering:

Uppgift 3 Ett system har tillståndsbeskrivningen

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t).$$

(a) Bestäm systemets *nollställen.* **Svar:**____________________

Lösning:

(b) Är systemet observerbart? **Svar:**____________________

Motivering:

(c) Systemet styrs med styrlagen $u(t) = -L\hat{x}(t) + my_{ref}(t)$, där $\hat{x}(t)$ fås från en observatör. Vektorn L har valts så att det slutna systemets poler hamnar i -5, -6 och -7, och förstärkningen m har valts så att $y = y_{ref}$ i stationäritet (d.v.s. den statiska förstärkningen är ett). Vad blir överföringsfunktionen från y_{ref} till y för det slutna systemet?

Svar:______________________________

Lösning:

Vid behov kan du fortsätta dina lösningar/motiveringar på detta ark. Markera tydligt vilken uppgift som avses.

Lösningar till tentamen i Reglerteknik I 5hp, del A 2013-08-19

1. **(a)** Det slutna systemet blir

$$Y(s) = \frac{\frac{K}{s(s+1)}}{1+\frac{K}{s(s+1)}} Y_{ref}(s) = \frac{K}{s(s+1)+K} Y_{ref}(s) = G_c(s)Y_{ref}(s).$$

Polpolynomet är $s(s+1)+K = s^2+s+K$, och för stabilitet krävs att alla poler ligger i VHP, vilket för andragradspolynom är ekvivalent med med att alla koefficienter är strikt positiva. Alltså stabilt för $K > 0$.

(b) Statiska förstärkningen är $G_c(0) = 1$.

(c) T_r så liten som möjligt $\Leftrightarrow$ polerna så långt från origo som möjligt, $M \leq 5\%$ $\Leftrightarrow$ tillräckligt liten relativ dämpning ζ. Jämför polpolynomet med "standardformen" $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$, där ω_0 är polernas avstånd från origo $\Rightarrow \omega_0^2 = K$ och $\zeta = 1/2\omega_0 = 1/2\sqrt{K}$. Alltså, ju större K desto snabbare poler, men också desto mindre ζ. För detta andra ordningens system gäller att $M = e^{-\alpha}$, där $\alpha = \pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}$ (se Exempel 3.3 i Glad-Ljung), så för $M = 5\%$ ska K väljas så att ζ ges av

$$\sqrt{1-\zeta^2}\alpha = \pi\zeta \quad \Leftrightarrow \quad (1-\zeta^2)\alpha^2 = \pi^2\zeta^2 \quad \Leftrightarrow \quad \zeta = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi^2+\alpha^2}},$$

där $\alpha = -\log M$. Med $M = 0.05$ blir $\zeta = 0.69$ (kan också utläsas direkt ur diagrammet i Figur 5.11 i Glad-Ljung). Välj alltså $K = 1/4\zeta^2 = 1/4 \cdot 0.69^2 = 0.52$.

2. **(a)** Här gäller $Y(s) = S(s)V(s)$, så enligt slutvärdesteoremet blir

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sS(s)\frac{1}{s} = S(0) = 0.1.$$

(b) Vid återkoppling från e blir $G_c(s) = T(s)$, och

$$T(s) = 1 - S(s) = 1 - \frac{s^2+5s+1}{s^2+5s+10} = \frac{9}{s^2+5s+10}.$$

(c) Enligt Resultat 6.2 i Glad-Ljung är det verkliga slutna systemet garanterat stabilt om $T(s)$ är stabil och $|\Delta_G(i\omega)| < 1/|T(i\omega)| \Leftrightarrow |\Delta_G(i\omega)| \cdot |T(i\omega)| < 1$ för alla ω. Här gäller

$$|\Delta_G(i\omega)| \cdot |T(i\omega)| < 1 \cdot 0.9 = 0.9 < 1,$$

så det verkliga slutna systemet är stabilt.

3. **(a)** Överföringsfunktionen är

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 0 & 0 \\ 0 & s+3 & 0 \\ 0 & 0 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{6}{s+2} - \frac{6}{s+3} + \frac{1}{s+4} = \frac{s^2+11s+30}{(s+2)(s+3)(s+4)},$$

så nollställena ges av $0 = s^2 + 11s + 30$, dvs de är -5 och -6.
(b) Observerbarhetsmatrisen är

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 4 & 9 & 16 \end{bmatrix},$$

och den har full rang. Enligt Resultat 8.9 i Glad-Ljung är systemet observerbart.
(c) Slutna systemets överföringsfunktion blir $mG_c(s) = \frac{mb(s)}{p(s)}$, där $b(s)$ är öppna systemets täljarpolynom och $p(s) = \det(sI - A + BL)$ (oavsett om observatör används eller ej). Här har L valts så att $p(s) = (s+5)(s+6)(s+7)$, och öppna systemets täljare är (från (a)) $(s+5)(s+6)$. Överföringsfunktionen blir alltså

$$mG_c(s) = \frac{m(s+5)(s+6)}{(s+5)(s+6)(s+7)} = \frac{m}{s+7}.$$

Dessutom, $mG_c(0) = 1$ så $m = 7$.