TENTAMEN: DEL B
Reglerteknik I 5hp

Tid: Fredag 25 oktober 2013, kl. 13.00-16.00

Plats: Magistern

Ansvarig lärare: Hans Norlander, tel. 018-4713070. Hans kommer och svarar på frågor ungefär kl 14.30.

Tillåtna hjälpmedel: Kursboken (Glad-Ljung), miniräknare, Laplace-tabell och matematisk formelsamling.

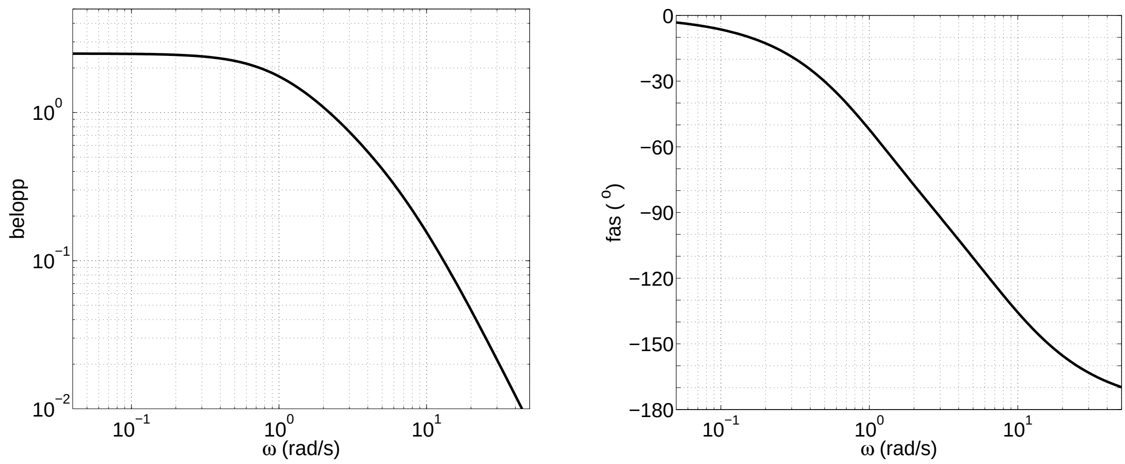
Skrivningen består av två delar, del A och del B. För att bli godkänd på skrivningen krävs att man är godkänd på del A.
Del B är frivillig och ges endast vid ordinarie tentatillfällen (vid respektive kurstillfällen.)
Preliminära betygsgränser:
Betyg 3: Godkänt på del A
Betyg 4: Godkänt på del A och minst 10 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)
Betyg 5: Godkänt på del A och minst 18 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)

<u>OBS:</u> Svar och lösningar lämnas in på separata papper. Endast en uppgift per ark. Skriv din tentakod på varje ark.

Lösningarna ska vara tydliga och väl motiverade (om inget annat anges). Avläsningar ur diagram behöver inte vara exakta.

LYCKA TILL!

Uppgift 1 Man vill styra varvtalet på en elektrisk maskin, som beskrivs som $Y(s) = G(s)U(s)$, där insignalen u är spänningen man lägger över ingången, och utsignalen y är varvtalet i antalet varv per sekund. Nedan visas Bodediagrammet för maskinen.



Man styr genom återkoppling från reglerfelet,

$$U(s) = F(s)(Y_{ref}(s) - Y(s)).$$

(a) För att helt eliminera reglerfelet i stationäritet vill man ha integralverkan i regulatorn. Man prövar först med en rent integrerande regulator, $F(s) = \frac{K}{s}$. Vad är då den högsta *skärfrekvens* man kan få om man vill ha fasmarginalen $\varphi_m \geq 50°$? **(2p)**

(b) Konstruera en regulator $F(s)$, med integralverkan, och sådan att det slutna systemet blir *tjugo* gånger så snabbt som i (a), och att fasmarginalen är $\varphi_m \geq 50°$. **(3p)**

Uppgift 2 Ange för vart och ett av följande påståenden ifall det är sant eller falskt.

(a) Tidsfördröjningen e^{-sT} och allpassfiltret $\frac{-Ts+2}{Ts+2}$ har identiska beloppkurvor i Bodediagrammet.

(b) Tillståndsbeskrivningen $\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$, $y(t) = x(t)$ är en minimal realisation för systemet $Y(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+1}U(s)$.

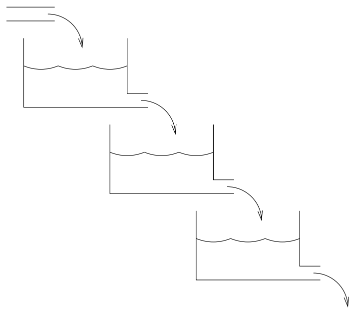
(c) Alla minimala realisationer är insignal-utsignalstabila.

(d) Alla insignal-utsignalstabila system är minfassystem.

(e) Alla asymptotiskt stabila tillståndsmodeller är insignal-utsignalstabila.

Varje rätt svar ger +1 poäng och varje felaktigt svar ger -1 poäng (och utelämnat svar ger noll poäng). Totalt ger dock uppgiften minst 0 poäng. Ingen motivering behövs — enbart svaren 'sant' och 'falskt' kommer att beaktas. **(5p)**

Uppgift 3 Ett system bestående av tre seriekopplade vattentankar ska styras — se figuren nedan. Man vill reglera nivån i den understa tanken. En enkel



modell, som beskriver avvikelsen från en arbetspunkt, är

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1}U(s), \quad X_2(s) = \frac{1}{s+1}X_1(s), \quad Y(s) = X_3(s) = \frac{1}{s+1}X_2(s),$$

där x_1, x_2 och x_3 är nivåerna i tankarna, uppifrån och ner, insignalen u är inflödet till den översta tanken och utsignalen y är nivån i den understa tanken.

(a) Ställ upp tillståndsmodellen för systemet, med tillståndsvektorn $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$. **(2p)**

(b) Är tillståndsmodellen i (a) en minimal realisation? **(1p)**

(c) När man styr systemet med proportionell återkoppling, $u = K(y_{ref} - y)$ med $K \geq 0$, blir det slutna systemet stabilt för $K < K_1$ och instabilt för $K > K_1$. För $K = K_1$ uppstår en självsvängning med vinkelfrekvensen ω_1. Bestäm K_1 och ω_1. **(2p)**

Uppgift 4 Känslighetsfunktionerna $S(s)$ och $T(s)$ har båda flera innebörder/tolkningar för ett återkopplat system. Anta att systemet

$$Y(s) = G(s)U(s) + V(s) \quad \text{återkopplas med} \quad U(s) = F(s)(Y_{ref}(s) - Y(s)).$$

Här är v en störning. $F(s)$ väljs så att slutna systemet är stabilt.

(a) För ett visst val av $F(s)$ blir

$$y(t) = \sin(t - \pi/2) \quad \text{då} \quad y_{ref}(t) = \sin t \quad \text{och} \quad v(t) = 0$$

(då alla transienter dött ut). Vad blir då $y(t)$ när $y_{ref}(t) = 0$ och $v(t) = \sin t$? *Ledning:* Vad blir $S(s) + T(s)$? **(3p)**

(b) Låt $M_T = \max_\omega |T(i\omega)|$. Med en viss regulatordesignmetod kan man få M_T att anta ett önskat värde, d.v.s. man kan därigenom själv välja vad maxvärdet av $|T(i\omega)|$ ska bli. Anta att det *verkliga* systemet har överföringsfunktionen $G^0(s) = G(s)(1 + \Delta_G(s))$, och att man vet att $|\Delta_G(i\omega)| < 0.8$ för alla ω. Vad bör man då välja M_T till ifall man vill kunna *garantera* stabiliteten för det verkliga slutna systemet? **(2p)**

Lösningar till tentamen i Reglerteknik I 5hp, del B 2013-10-25

1. **(a)** Med den integrerande regulatorn blir kretsförstärkningen $G_o(s) = \frac{K}{s}G(s)$, och därmed

$$|G_o(i\omega)| = \frac{K}{\omega}|G(i\omega)|,$$
$$\arg G_o(i\omega) = \arg\left(\frac{K}{i\omega}\right) + \arg G(i\omega) = -90^\circ + \arg G(i\omega).$$

Här är $|G(i\omega)|$ och $\arg G(i\omega)$ kända från Bodediagrammet. För att få $\varphi_m \geq 50^\circ$ krävs att $\arg G_o(i\omega_c) \geq -130^\circ$, vilket här innebär att $\arg G(i\omega_c) \geq -40^\circ$. Bodediagrammet ger att $\arg G(i\omega) \geq -40^\circ$ för $\omega \leq 0.7$ rad/s. Alltså är den högsta möjliga skärfrekvensen $\omega_c = 0.7$ rad/s.
(b) Tjugo gånger så snabbt $\Rightarrow$ välj $\omega_c = 20 \cdot 0.7 = 14$ rad/s. Vi vill också ha $\varphi_m \geq 50^\circ$, och integralverkan i regulatorn. Från Bodediagrammet får vi

$$|G(i14)| = 0.09 \qquad \text{och} \qquad \arg G(i14) = -146^\circ.$$

Regulatorn måste alltså skjuta till 16° för att få $\varphi_m = 50^\circ$. Därför använder vi ett leadfilter, och integralverkan fixar vi med ett lagfilter med $\gamma = 0$. För att kompensera för lagfiltrets negativa fasbidrag låter vi leadfiltret skjuta till $16^\circ + 6^\circ = 22^\circ$ vid $\omega_c = 14$ rad/s. Fig. 5.13 $\Rightarrow$ välj $\beta = 0.45$. Välj τ_D så att leadfiltrets maxfas inträffar vid önskade skärfrekvensen: $\tau_D = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\beta}} = \frac{1}{14\sqrt{0.45}} = 0.1065$. Slutligen väljs K så att $\omega_c = 14$ rad/s verkligen blir skärfrekvens:

$$1 = |F_{lead}(i\omega_c)||F_{lag}(i\omega_c)||G(i\omega_c)| = \frac{K}{\sqrt{\beta}}|G(i\omega_c)|$$
$$\Leftrightarrow \qquad K = \frac{\sqrt{\beta}}{|G(i\omega_c)|} = \frac{\sqrt{0.45}}{0.09} = 7.45.$$

Leadfiltret blir då

$$F_{lead}(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1} = 7.45\frac{0.1065s + 1}{0.45 \cdot 0.1065s + 1}.$$

I lagfiltret väljer vi $\gamma = 0$ för att få integralverkan, och enligt tumregeln väljer vi $\tau_I = \frac{10}{\omega_c} = \frac{10}{14} = 0.71$. Lagfiltret blir då

$$F_{lag}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma} = \frac{0.71s + 1}{0.71s},$$

och den totala regulatorn är $F(s) = F_{lead}(s)F_{lag}(s)$.

2. **(a)** Sant (ty $|e^{i\omega T}| = |-iT\omega + 2|/|iT\omega + 2| = 1$); **(b)** Sant (ty $\frac{s+1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{s+1}$.); **(c)** Falskt (motexempel: $\dot{x} = x + u$, $y = x$ är instabilt.); **(d)** Falskt (motexempel: stabila systemet $G(s) = \frac{-s+1}{s+1}$ har nollställe i HHP.);

(e) Sant (Res. 8.6-7.)

3. (a) För x_1 gäller

$$(s+1)X_1(s) = U(s) \quad \Leftrightarrow \quad sX_1(s) = -X_1(s) + U(s) \quad \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} \quad \dot{x}_1 = -x_1 + u.$$

Samma gäller även för x_2 och x_3, vilket ger oss

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + u, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_2 - x_3, \\ y &= x_3, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x. \end{cases}$$

(b) Minimal realisation $\Leftrightarrow$ både styrbart och observerbart (Res. 8.11). Styrbarhets- och observerbarhetsmatriserna blir här

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Både $\mathcal{S}$ och $\mathcal{O}$ har full rang och systemet är därför både styrbart (Res. 8.8) och observerbart (Res. 8.9). Alltså är det en minimal realisation.

(c) Det gäller att $Y(s) = \frac{1}{(s+1)^3}U(s)$, och med $U(s) = K(Y_{ref}(s) - Y(s))$ blir kretsförstärkningen $G_o(s) = \frac{K}{(s+1)^3}$. Det slutna systemet blir $Y(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)}Y_{ref}(s)$, och dess poler ges av $0 = 1 + G_o(s)$, vilket här blir

$$0 = 1 + \frac{K}{(s+1)^3} \quad \Leftrightarrow \quad 0 = (s+1)^3 + K = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K.$$

Stabiliteten kan t.ex. undersökas med Rouths algorithm:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1+K & 0 \\ 3 - \frac{1+K}{3} & 0 & \\ 1+K & & \end{array}$$

För stabilitet krävs att $3 - \frac{1+K}{3} > 0$ och att $1 + K > 0$. Här vet vi dock att $K \geq 0$ så stabilitetsvillkoret blir $9 - (1+K) > 0 \Leftrightarrow K < 8$. Alltså är $K_1 = 8$. Självsvängning uppstår pga. poler på Im-axeln, i $\pm i\omega_1$ (där ju ω_1 är självsvängningens vinkelfrekvens). För att undersöka detta sätter vi $s = i\omega$:

$$0 = (i\omega)^3 + 3(i\omega)^2 + 3(i\omega) + 1 + K = \underbrace{1 + K - 3\omega^2}_{\text{realdel}} + i\,\underbrace{\omega(3 - \omega^2)}_{\text{imaginärdel}}$$

Både realdelen och imaginärdelen måste vara noll $\Rightarrow 3 - \omega_1^2 = 0$, dvs. $\omega_1 = \sqrt{3}$ rad/s.

4. (a) Vid återkoppling från reglerfelet, som här, blir det slutna systemet

$$Y(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} Y_{ref}(s) + \frac{1}{1+G_o(s)} V(s) = T(s)Y_{ref}(s) + S(s)V(s).$$

"Sinus in–sinus ut" ger att då att

$$y_{ref}(t) = \sin t \quad \text{och} \quad v(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = |T(i)| \sin(t + \arg T(i)),$$

och då

$$v(t) = \sin t \quad \text{och} \quad y_{ref}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = |S(i)| \sin(t + \arg S(i)).$$

Vi vet att

$$|T(i)| = 1 \quad \text{och} \quad \arg T(i) = -\pi/2 \quad \Leftrightarrow \quad T(i) = -i.$$

Därför är

$$S(i) = 1 - T(i) = 1 + i \quad \Rightarrow \quad S(i) = \sqrt{2} \quad \text{och} \quad \arg S(i) = \pi/4.$$

Alltså blir $y(t) = \sqrt{2}\sin(t + \pi/4)$.
(b) Res. 6.2 $\Rightarrow$ om $T(s)$ är stabil och om $|T(i\omega)| < 1/|\Delta_G(i\omega)|$ för alla ω så är slutna systemet garanterat stabilt. Alltså bör man se till att $M_T < 1/0.8 = 1.25$.