TENTAMEN: DEL A
Reglerteknik I 5hp

Tid: Tisdag 21 augusti 2012, kl. 8.00-11.00

Plats: Bergsbrunnagatan 15, sal 1

Ansvarig lärare: Hans Norlander, tel. 018-4713070. Hans kommer och svarar på frågor ungefär kl 9.30.

Tillåtna hjälpmedel: Kursboken (Glad-Ljung), miniräknare, Laplace-tabell och matematisk formelsamling.

Examinationen består av två delar, del A och del B. För att bli godkänd krävs att man är godkänd på del A, och för detta krävs godkänt på varje uppgift. Del B är frivillig och ges endast vid ordinarie tentatillfällen (vid respektive kurstillfällen).

Preliminära betygsgränser:
Betyg 3: Godkänt på del A
Betyg 4: Godkänt på del A och minst 10 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)
Betyg 5: Godkänt på del A och minst 18 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)

OBS: Svar och lösningar/motiveringar ska skrivas på angiven plats i detta provhäfte, och provhäftet ska lämnas in.
Lösningarna ska vara tydliga och väl motiverade (om inget annat anges).

LYCKA TILL!

Tentamenskod (6 siffror)	(alt. namn och personnummer)
Utbildningsprogram	Termin och år då du först registrerades på kursen
Bordsnummer	Klockslag för inlämning

Resultat:

Uppgg. 1	Uppgg. 2	Uppgg. 3	Del A
G/U	G/U	G/U	G/U

Uppgift 1 Ett system beskrivs av

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} x, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad Y(s) = \frac{2}{s^2+s+1} U(s).$$

(a) Visa att tillståndsbeskrivningen ovan är en minimal realisation.

Lösning:

(b) Systemet ovan styrs med styrlagen $u = -\begin{bmatrix} 3 & 7 \end{bmatrix} x + 4y_{ref}$. **Ringa in** den av överföringsfunktionerna nedan som är $mG_c(s)$ för det slutna systemet (i sambandet $Y(s) = mG_c(s)Y_{ref}(s)$).

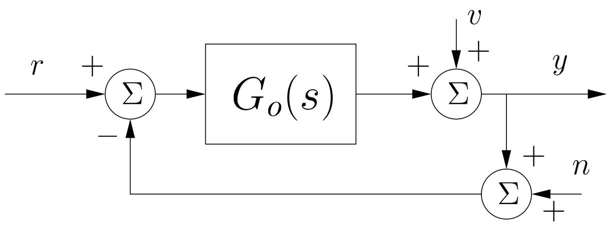
$$\frac{4}{s^2+3s+3}, \quad \frac{2}{s^2+s+5}, \quad \frac{4}{s^2+4s+8}, \quad \frac{8}{(s+2)^2+4}.$$

Motivering:

(c) Styrlagen i (b) förutsätter ju att man kan mäta hela tillståndsvektorn x. Normalt kan man dock inte mäta x utan bara utsignalen y. Det är ändå möjligt att använda en styrlag liknande den i (b) och samtidigt få samma överföringsfunktion $mG_c(s)$ som i (b), genom återkoppling från y. Förklara hur man åstadkommer detta, samt ange hur styrlagen i (b) ska modifieras.

Svar:

Uppgift 2 Betrakta det återkopplade systemet i blockdiagrammet nedan.



Referenssignalen är $r = 0$. Systemet påverkas också (som framgår av blockdiagrammet) dels av en processtörning v, dels av en mätstörning n. Nominellt antas $v = n = 0$.
Den komplementära känslighetsfunktionen för det återkopplade systemet är

$$T(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3}.$$

(a) Ange kretsförstärkningen $G_o(s)$. **Svar:**____________________

Lösning:

(b) Vad blir överföringsfunktionen från r till reglerfelet $e = r - y$?
Svar:____________________

Lösning:

(c) Anta att det inträffar en processtörning i form av ett enhetssteg (d.v.s. v är ett enhetssteg). Vad blir då $\lim_{t\to\infty} y(t)$? **Svar:**______________

Lösning:

Uppgift 3 Ett system $Y(s) = G(s)U(s)$ har viktfunktionen

$$g(t) = e^{-t} - e^{-2t}.$$

(a) Ange systemets överföringsfunktion $G(s)$. **Svar:**____________________

Lösning:

Systemet styrs med styrlagen $U(s) = F(s)(Y_{ref}(s) - Y(s))$, där regulatorn är

$$F(s) = K + \frac{6}{s}.$$

(b) Regulatorn $F(s)$ är av en standardtyp. **Ringa in** den av nedanstående benämningar som avser just denna regulatortyp:

P-, PI-, PD-, PID-regulator

Ev. motivering (ej nödvändig):

(c) Ange för vilka $K \in \mathbb{R}$ som det slutna systemet är stabilt.
Svar:____________________

Lösning:

Vid behov kan du fortsätta dina lösningar/motiveringar på detta ark. Markera tydligt vilken uppgift som avses.

Lösningar till tentamen i Reglerteknik I 5hp 2012-08-21

1. **(a)** Minimal realisation $\iff$ både styrbart och observerbart. Systemet är på styrbar kanonisk form $\implies$ styrbart. Observerbarhetsmatrisen är

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

och $\mathcal{O}$ har full rang $\implies$ observerbart.
(b) Med tillståndsåterkoppling, $u = -Lx + my_{ref}$ blir

$$mG_c(s) = \frac{mb(s)}{p(s)} \quad \text{där} \quad p(s) = \det(sI - A + BL),$$

och $b(s)$ är öppna systemets täljarpolynom, d.v.s. $b(s) = 2$ här. Här blir

$$p(s) = \det(sI - A + BL) = \det \begin{bmatrix} s+1+l_1 & 1+l_2 \\ -1 & s \end{bmatrix} = s^2 + (1+l_1)s + 1 + l_2 = s^2 + 4s + 8.$$

Alltså blir $mG_c(s) = \frac{4 \cdot 2}{s^2+4s+8} = \frac{8}{(s+2)^2+4}$.
(c) Om man istället för styrlagen $u = -Lx + my_{ref}$ använder styrlagen $u = -L\hat{x} + my_{ref}$, där $\hat{x}$ är en skattning av x som fås från en observatör, så blir överföringsfunktionen $mG_c(s)$ ändå densamma.

2. **(a)** Per definition är $T(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)}$, och $T(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3} = \frac{2s+5}{(s+2)(s+3)}$, så

$$G_o(s) = \frac{T(s)}{1 - T(s)} = \frac{\frac{2s+5}{(s+2)(s+3)}}{1 - \frac{2s+5}{(s+2)(s+3)}} = \frac{2s+5}{s^2+3s+1}.$$

(b) Vi har $E(s) = R(s) - Y(s) = (1 - T(s))R(s) = \frac{s^2+3s+1}{(s+2)(s+3)} R(s)$. (Här är $1 - T(s) = S(s)$, d.v.s. känslighetsfunktionen.)
(c) Använd slutvärdesteoremet: $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sS(s)\frac{1}{s} = S(0)$. Eftersom $S(s) + T(s) = 1$ blir $\lim_{t\to\infty} y(t) = 1 - T(0) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

3. **(a)** Vi har $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$, så

$$G(s) = \mathcal{L}\left[e^{-t} - e^{-2t}\right] = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}.$$

(b) Regulatorn har en proportionell del (K) och en integrerande del ($\frac{6}{s}$) och är alltså en PI-regulator.
(c) Polerna ges av rötterna till $0 = 1 + G_o(s)$, där $G_o(s) = F(s)G(s)$, och från (a) har vi att $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$. Alltså ges polerna av

$$0 = 1 + (K + \frac{6}{s})\frac{1}{(s+1)(s+2)} = 1 + \frac{Ks+6}{s(s+1)(s+2)} \iff$$
$$0 = s(s+1)(s+2) + Ks + 6 = s^3 + 3s^2 + (2+K)s + 6.$$

Stabiliteten undersöks med Rouths algoritm:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2+K & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ K & 0 & \\ 6 & & \end{array}$$

Enligt Rouths sats är systemet stabilt för $K > 0$.