TENTAMEN: DEL B
Reglerteknik I 5hp

Tid: Tisdag 23 oktober 2012, kl. 8.00-11.00

Plats: Ekonomikum B:154

Ansvarig lärare: Hans Norlander, tel. 018-4713070. Hans kommer och svarar på frågor ungefär kl 9.30.

Tillåtna hjälpmedel: Kursboken (Glad-Ljung), miniräknare, Laplace-tabell och matematisk formelsamling.

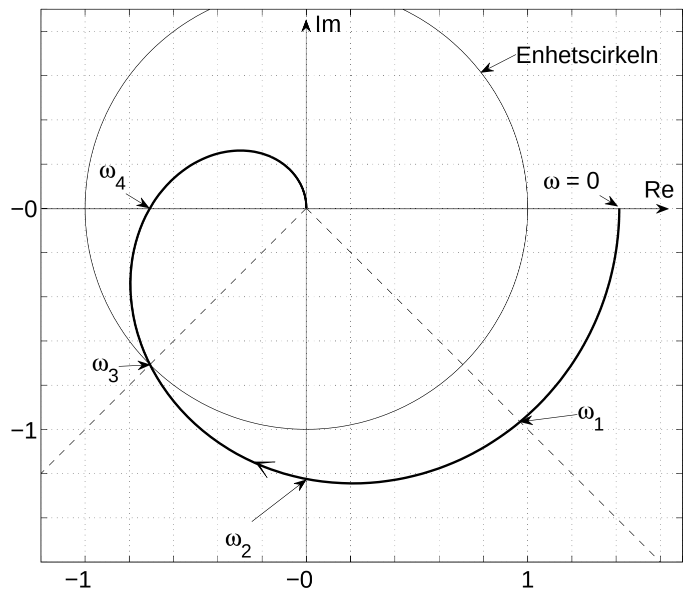
Skrivningen består av två delar, del A och del B. För att bli godkänd på skrivningen krävs att man är godkänd på del A.
Del B är frivillig och ges endast vid ordinarie tentatillfällen (vid respektive kurstillfällen.)
Preliminära betygsgränser:
Betyg 3: Godkänt på del A
Betyg 4: Godkänt på del A och minst 10 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)
Betyg 5: Godkänt på del A och minst 18 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)

<u>OBS:</u> Svar och lösningar lämnas in på separata papper. Endast en uppgift per ark. Skriv din tentakod på varje ark.

Lösningarna ska vara tydliga och väl motiverade (om inget annat anges). Avläsningar ur diagram behöver inte vara exakta.

LYCKA TILL!

Uppgift 1 Ett system $Y(s) = G(s)U(s)$ ska styras med återkoppling från reglerfelet, $U(s) = F(s)(R(s) - Y(s))$. I figuren nedan visas Nyquistkurvan för kretsförstärkningen då proportionell återkoppling med förstärkning ett används, d.v.s. $F(s) = K = 1$. I figuren markeras några frekvenser vars



numeriska värden ges nedan:

$$\omega_1 = 2 - \sqrt{3} \approx 0.268 \text{ rad/s} \quad \omega_2 = 1/\sqrt{3} \approx 0.577 \text{ rad/s}$$
$$\omega_3 = 1 \text{ rad/s} \quad \omega_4 = \sqrt{3} \approx 1.732 \text{ rad/s}$$

(a) Om man använder proportionell återkoppling, $F(s) = K$, vilket är det minsta kvarvarande fel man kan få hos stegsvaret? Bestäm det minsta möjliga värdet på $\lim_{t\to\infty}(r(t) - y(t))$ då $r(t)$ är ett enhetssteg. **(1p)**

(b) För att bli av med stegsvarets kvarvarande fel kan man t.ex. använda en integrerande regulator, $F(s) = K/s$. Vilket $K > 0$ ska man välja för att få samma fasmarginal som man får med $F(s) = 1$? **(2p)**

(c) Anta att man använder proportionell återkoppling med förstärkning ett, men att man har en tidsfördröjning i regulatorn, d.v.s. $F(s) = e^{-sT}$, $T > 0$. Hur stor tidsfördröjning T kan man tillåta utan att det slutna systemet blir instabilt? **(2p)**

Uppgift 2 Man har konstruerat ett reglersystem för uppvärmningen av ett växthus, och man har utgått från följande modell:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \theta(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t),\end{aligned}$$

vilket är ekvivalent med

$$Y(s) = \frac{40}{s^2 + 10s + 15} U(s) + \frac{3s + 15}{s^2 + 10s + 15} \Theta(s).$$

Här är y temperaturen i växthuset, u är tillförd effekt till radiatorn och θ är utetemperaturen. Man styr med tillståndsåterkopplingen

$$u(t) = L\hat{x}(t) + my_{ref}(t)$$

där $\hat{x}$ fås från en observatör. Styrlagen kan också skrivas

$$U(s) = mF_r(s)Y_{ref}(s) - F_y(s)Y(s).$$

Regulatorn är utformad så att det slutna systemets poler är $-5 \pm i5$, observatörspolerna är $-7 \pm i7$, och så att $y = y_{ref}$ i stationäritet då $\theta = 0°\mathrm{C}$ (d.v.s. statiska förstärkningen är ett).

(a) Bestäm $F_r(s)$ och $F_y(s)$ i styrlagen ovan. **(4p)**

(b) För att få önskad innetemperatur även då $\theta \neq 0°\mathrm{C}$ kan styrlagen kompletteras med en framkopplingsterm: $U(s) = mF_r(s)Y_{ref}(s) - F_y(s)Y(s) + K_f\Theta_{ute}(s)$. Bestäm K_f så att $y = y_{ref}$ i stationäritet även då $\theta \neq 0°\mathrm{C}$. **(1p)**

Uppgift 3 Ange för vart och ett av följande påståenden ifall det är sant eller falskt.

(a) Tillståndsmodellen i uppgift 2 ovan är styrbar från θ.

(b) Systemet i uppgift 2 är *minimum fas* från u till y.

(c) Tillståndsmodellen i uppgift 2 är *asymptotiskt stabil.*

(d) Tillståndsmodellen i uppgift 2 är observerbar från θ.

(e) När systemet i uppgift 2 styrs med återkoppling blir överföringsfunktionen från θ till y identisk med *känslighetsfunktionen* $S(s)$.

Varje rätt svar ger +1 poäng och varje felaktigt svar ger -1 poäng (och utelämnat svar ger noll poäng). Totalt ger dock uppgiften minst 0 poäng. Ingen motivering behövs — enbart svaren 'sant' och 'falskt' kommer att beaktas. **(5p)**

Uppgift 4 Kurt-Sune och Berit har kommit på idén att bygga om en brödrost från att vara tidsstyrd till att vara effektstyrd. Därmed hoppas de kunna kontrollera temperaturen (Kurt-Sune vill kunna tillaga t.ex. fiskpinnar i den). De vill styra den med återkoppling och Kurt-Sune försöker först med styrlagen $u(t) = y_{ref}(t) - y(t)$ och gör ett stegsvarsexperiment. Temperaturen y når till slut upp till 90% av y_{ref} och stigtiden är lite för lång, men överslängen är acceptabel. Berit gör då en serie "sinus in–sinus ut"-experiment för att mäta upp brödrostens frekvenssvar. Resultatet av detta redovisas i tabellen nedan:

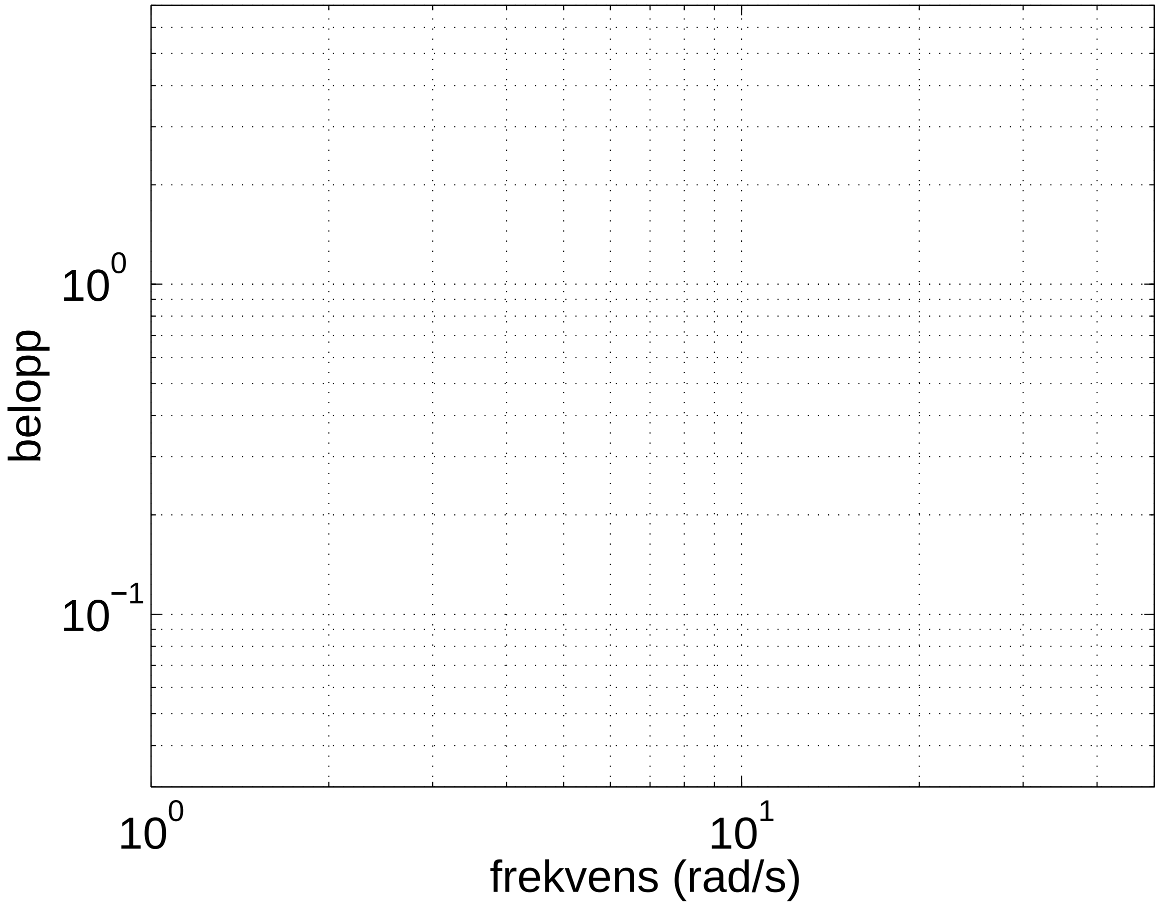
ω [rad/s]	1	2	5	10	20	50
$\lvert G(i\omega)\rvert$	6.33	3.95	1.58	0.63	0.20	0.035
$\arg G(i\omega)$	$-51°$	$-75°$	$-105°$	$-129°$	$-151°$	$-169°$

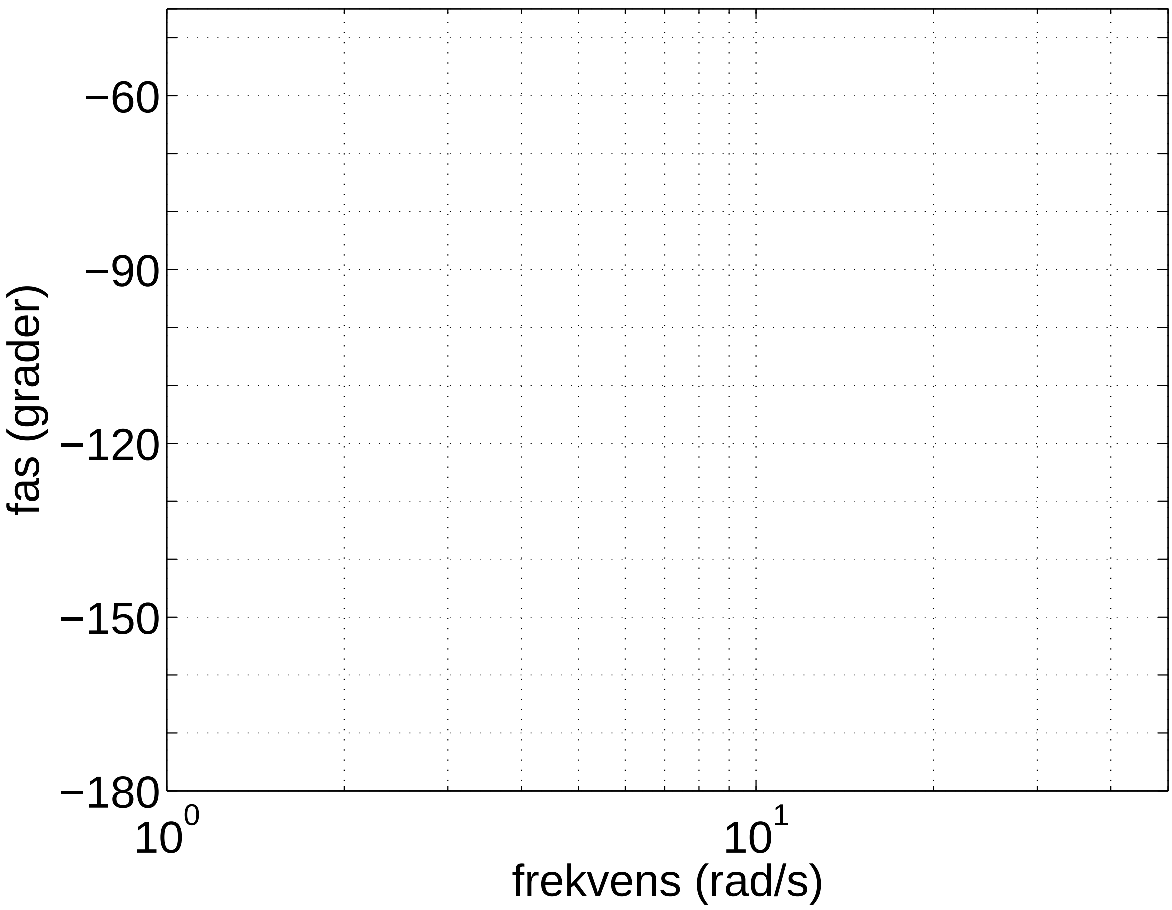
(a) Vad är brödrostens statiska förstärkning (från u till y)? **(1p)**

(b) Kurt-Sune och Berit vill styra brödrosten med en enkel och billig mikroprocessor, och därför bör regulatorn vara enklast tänkbara. Hjälp Kurt-Sune och Berit att konstruera en regulator av så låg ordning som möjligt så att följande önskemål uppfylls:

1. slutna systemet är dubbelt så snabbt som med $u = y_{ref} - y$,
2. stegsvaret har samma överläng som för $u = y_{ref} - y$,
3. $y = y_{ref}$ i stationäritet, och
4. regulatorns förstärkning för höga frekvenser är inte större än nödvändigt.

Som ett stöd bifogas ett tomt Bodediagram där frekvenssvaret kan ritas in. Detta behöver inte lämnas in med lösningen. **(4p)**


belopp
10^0
10^{-1}
10^0
10^1
frekvens (rad/s)


fas (grader)
−60
−90
−120
−150
−180
10^0
10^1
frekvens (rad/s)

Lösningar till tentamen i Reglerteknik I 5hp, del B 2012-10-23

1. **(a)** Kretsförstärkningen blir $G_o(s) = KG(s)$, och vid återkoppling från $e = r - y$ blir $E(s) = S(s)R(s) = \frac{1}{1+KG(s)}R(s)$. Med $R(s) = \frac{1}{s}$ fås med slutvärdesteoremet

$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+KG(s)}\frac{1}{s} = \frac{1}{1+KG(0)}.$$

Från Nyquistdiagrammet fås att $G(0) = 1.41$, så $e(\infty) = \frac{1}{1+1.41K}$ vilket blir mindre ju större K är. Dock måste slutna systemet vara stabilt. Från Nyquisdiagrammet fås att $KG(i\omega_4) = -0.71K$, och för stabilitet krävs $-0.71K > -1 \Leftrightarrow K < \frac{1}{0.71} = 1.41$. Det minsta felet blir alltså $e(\infty) = \frac{1}{1+1.41^2} \approx 0.33$.
(b) Med $F(s) = 1$ blir $G_o(s) = G(s)$, och från Nyquistdiagrammet fås då att $\omega_c = \omega_3 = 1$ rad/s och $\varphi_m = 45°$. Med $F(s) = \frac{K}{s}$ blir $G_o(s) = \frac{K}{s}G(s)$, och därmed

$$|G_o(i\omega)| = \frac{K}{\omega}|G(i\omega)|, \quad \arg G_o(i\omega) = -90° + \arg G(i\omega)$$

Vi vill ha $\varphi_m = 45° \Rightarrow \arg G_o(i\omega_c) = -135° \Rightarrow \arg G(i\omega_c) = -45°$. Från Nyquistdiagrammet fås då att $\omega_c = \omega_1 = 0.268$ rad/s. Mätning i Nyquistdiagrammet ger $|G(i\omega_1)| = 1.37$. För att $\omega_c = \omega_1$ ska gälla måste

$$1 = |G_o(i\omega_1)| = \frac{K}{\omega_1}|G(i\omega_1)| \quad \Leftrightarrow \quad K = \frac{\omega_1}{|G(i\omega_1)|} = \frac{0.268}{1.37} = 0.196.$$

(c) Nu blir $G_o(s) = e^{-sT}G(s)$, och därmed

$$|G_o(i\omega)| = |e^{-i\omega T}||G(i\omega)| = |G(i\omega)|, \quad \arg G_o(i\omega) = -\omega T + \arg G(i\omega).$$

För stabilitet måste $\arg G_o(i\omega_c) = -\omega_c T + \arg G(i\omega_c) > -\pi$ gälla. Eftersom beloppet inte påverkas blir $\omega_c = \omega_3 = 1$ rad/s och $\arg G(i\omega_c) = -\frac{3\pi}{4}$. Villkoret för stabilitet blir alltså

$$-\pi < -\frac{3\pi}{4} - T \quad \Leftrightarrow \quad T < \frac{\pi}{4} = 0.785.$$

2. **(a)** Vi har att

$$F_y(s) = L(sI - A + BL + KC)^{-1}K, \quad F_r(s) = 1 - L(sI - A + BL + KC)^{-1}B$$

(enligt ekvationer näst högst upp på sidan 201 i kursboken). Slutna systemets polpolynom blir

$$\det(sI - A + BL) = \det\begin{bmatrix} s+5 & -2 \\ -5+20l_1 & s+5+20l_2 \end{bmatrix} = s^2 + (10+20l_2)s + 15 + 40l_1 + 100l_2.$$

Önskat polpolynom är $(s+5)^2 + 5^2 = s^2 + 10s + 50$. Identifiering av koefficienter ger $10 + 20l_2 = 10$ och $15 + 40l_1 + 100l_2 = 50 \Leftrightarrow l_1 = \frac{7}{8} = 0.875$ och $l_2 = 0$. Observatörspolynomet blir

$$\det(sI - A + KC) = \det\begin{bmatrix} s+5+k_1 & -2 \\ -5+k_2 & s+5 \end{bmatrix} = s^2 + (10+k_1)s + 15 + 5k_1 + 2k_2.$$

Önskat observatörspolynom är $(s+7)^2+7^2 = s^2+14s+98$. Identifiering av koefficienter ger $10+k_1 = 14$ och $15+5k_1+2k_2 = 98 \Leftrightarrow k_1 = 4$ och $k_2 = 31.5$. Nu blir

$$L(sI - A + BL + KC)^{-1} = \begin{bmatrix}0.875 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+9 & -2\\ 44 & s+5\end{bmatrix}^{-1} = \frac{0.875\begin{bmatrix}s+5 & 2\end{bmatrix}}{s^2+14s+133}.$$

Alltså blir

$$F_y(s) = \frac{0.875\begin{bmatrix}s+5 & 2\end{bmatrix}}{s^2+14s+133}\begin{bmatrix}4\\ 31.5\end{bmatrix} = \frac{0.875(4s+83)}{s^2+14s+133} = \frac{3.5s+72.625}{s^2+14s+133}$$

$$F_r(s) = 1 - \frac{0.875\begin{bmatrix}s+5 & 2\end{bmatrix}}{s^2+14s+133}\begin{bmatrix}0\\ 20\end{bmatrix} = 1 - \frac{35}{s^2+14s+133} = \frac{s^2+14s+98}{s^2+14s+133}.$$

(b) Med $Y(s) = G(s)U(s)+H(s)\Theta(s)$ och $U(s) = F_r(s)Y_{ref}(s) - F_y(s)Y(s) + K_f\Theta(s)$ blir slutna systemet

$$Y(s) = \frac{mF_r(s)G(s)}{1+F_y(s)G(s)}Y_{ref}(s) + \frac{H(s)+K_fG(s)}{1+F_y(s)G(s)}\Theta(s).$$

Den första termen har statisk förstärkning lika med ett. Välj nu K_f så att den andra termen får statisk förstärkning lika med noll $\Leftrightarrow H(0)+K_fG(0) = 0$. Välj alltså $K_f = -H(0)/G(0) = -15/40 = -0.375$.

3. **(a)** Sant; **(b)** Sant; **(c)** Sant; **(d)** Falskt; **(e)** Falskt.

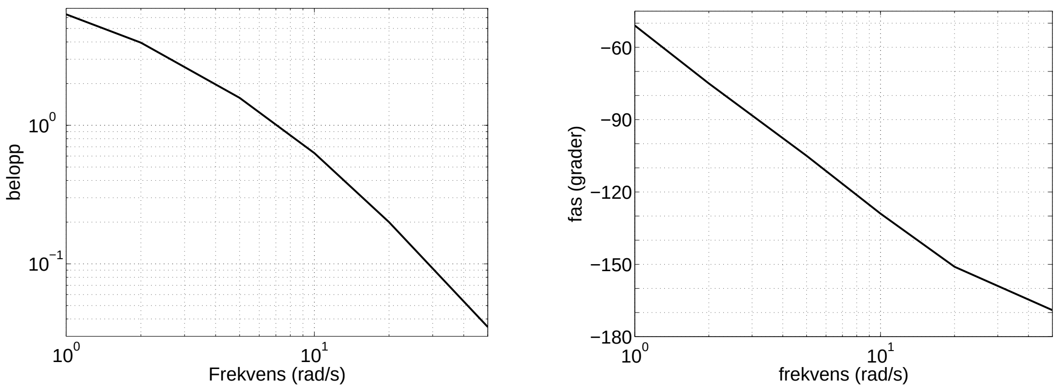
4. **(a)** Med $u = y_{ref} - y$ blir kretsförstärkningen $G_o(s) = G(s)$ och det slutna systemet $Y(s) = G_c(s)Y_{ref}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}Y_{ref}(s)$. Vi vet att $G_c(0) = 0.9 \Rightarrow$

$$0.9 = \frac{G(0)}{1+G(0)} \quad\Leftrightarrow\quad 0.9(1+G(0)) = G(0) \quad\Leftrightarrow\quad G(0) = 0.9/0.1 = 9.$$

(b) För att få $y = y_{ref}$ krävs integralverkan, och $G(s)$ har inte det så det måste regulatorn $F(s)$ ha $\Rightarrow$ använd ett lagfilter (en PI-regulator) $F_{lag}(s) = \frac{\tau_I s+1}{\tau_I s+\gamma}$. Dubbelt så snabbt men samma översläng som med $u = y_{ref} - y \Rightarrow$ fördubbla skärfrekvensen ω_c men behåll fasmarginalen φ_m. Rita in frekvenssvaret i Bodediagrammet. Med $F(s) = 1$ blir skärfrekvensen 7 rad/s och fasmarginalen 63°. Vi vill alltså ha $\omega_c = 2\cdot 7 = 14$ rad/s och $\varphi_m = 63°$. Från Bodediagrammet får vi att $|G(i14)| = 0.36$ och $\arg G(i14) = -140°$. Regulatorn måste alltså skjuta till $23° + 6° = 29° \Rightarrow$ använd ett leadfilter $F_{lead}(s) = K\frac{\tau_D s+1}{\beta\tau_D s+1}$.

Fig. 5.13 $\Rightarrow$ välj $\beta = 0.34$. För att få maxfas vid ω_c väljs $\tau_D = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\beta}} = \frac{1}{14\sqrt{0.34}} = 0.0416$. För att $\omega_c = 1$ rad/s ska bli skärfrekvens:

$$1 = |G_o(i\omega_c)| = \frac{K}{\sqrt{\beta}}|G(i\omega_c)| \quad\Leftrightarrow\quad K = \frac{\sqrt{\beta}}{|G(i\omega_c)|} = \frac{\sqrt{0.34}}{0.36} = 1.62.$$



Leadfiltret blir

$$F_{lead}(s) = 1.62\frac{0.0416s + 1}{0.34 \cdot 0.0416 + 1}.$$

För lagfiltret väljs $\gamma = 0$ för att få integralverkan, och $\tau_I = \frac{10}{\omega_c} = \frac{10}{14} = 0.71$ enligt tumregel. Lagfiltret blir

$$F_{lag}(s) = \frac{0.71s + 1}{0.71s}.$$

Lagfiltret behövs för krav 3, leadfiltret behövs för kraven 1 och 2. Därmed är $F(s) = F_{lead}(s)F_{lag}(s)$. För att tillgodose krav 4 ska β inte väljas mindre än nödvändigt. Detta $F(s)$ är då av så låg ordning som möjligt.