Tentamenskod	Utbildningsprogram
Klockslag för inlämning	Bordnummer

1RT490 Reglerteknik I 5hp
Tentamen: Del A

Tid: Torsdag 17 mars 2016, kl. 8.00-11.00

Plats: Fyrislundsgatan 80, sal 1

Ansvarig lärare: Hans Norlander, tel. 018-4713070.

Tillåtna hjälpmedel: Kursboken (Glad-Ljung), miniräknare, Laplace-tabell och matematisk formelsamling.

Examinationen består av två delar, del A och del B. För att bli godkänd krävs att man är godkänd på del A, och för detta krävs godkänt på varje uppgift. Del B är frivillig och ges endast vid ordinarie tentatillfällen (vid respektive kurstillfällen).

Preliminära betygsgränser:
Betyg 3: Godkänt på del A
Betyg 4: Godkänt på del A och minst 10 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)
Betyg 5: Godkänt på del A och minst 18 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)

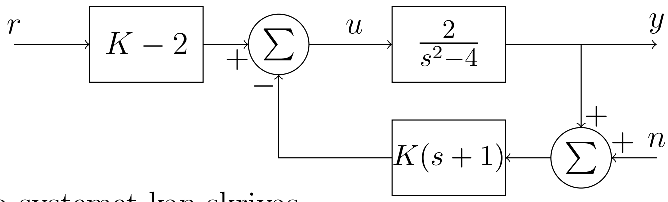
OBS: Svar och lösningar/motiveringar ska skrivas på angiven plats i detta provhäfte, och provhäftet ska lämnas in.
Lösningarna ska vara tydliga och väl motiverade (om inget annat anges).

LYCKA TILL!

Resultat:

Uppg. 1	**Uppg. 2**	**Uppg. 3**	**Del A**
G/U	G/U	G/U	**G/U**
Ev. kommentar från lärare:			

Uppgift 1 Blockschemat nedan visar ett återkopplat system.



Det slutna systemet kan skrivas

$$Y(s) = G_r(s)R(s) + G_n(s)N(s). \tag{1}$$

(a) Bestäm överföringsfunktionerna $G_r(s)$ och $G_n(s)$ i (1) (uttryckta i K och s och siffror).

Svar: $G_r(s) =$ ____________________ , $G_n(s) =$ ____________________

Lösning:

(b) För vilka $K \in \mathbb{R}$ är det slutna systemet ovan stabilt? **Svar:**________________

Lösning:

(c) Känslighetsfunktionerna $S(s)$ och $T(s)$ har flera viktiga innebörder för ett återkopplat system. Exempelvis finns det kopplingar mellan $S(s)$ och $T(s)$ och det relativa modellfelet $\Delta_G(s)$. (Det verkliga systemet $G^0(s)$ förhåller sig till modellen $G(s)$ som $G^0(s) = G(s)(1 + \Delta_G(s))$.)

Ange (minst) en sådan koppling mellan $\Delta_G(s)$ och $S(s)$ eller $T(s)$, samt ge en kortfattad förklaring av innebörden.

Svar:

Uppgift 2 Betrakta systemet med tillståndsbeskrivningen

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t). \end{cases} \tag{2}$$

(a) Vad är systemets överföringsfunktion? **Svar:** $G(s) =$ ____________________

Ange också systemets *viktfunktion.* **Svar:** $g(t) =$ ____________________

Lösning:

(b) Är tillståndsbeskrivningen (2) en minimal realisation? **Svar:**____________

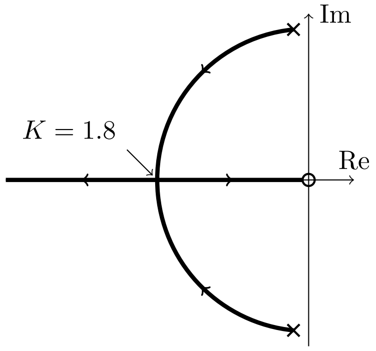
Motivering:

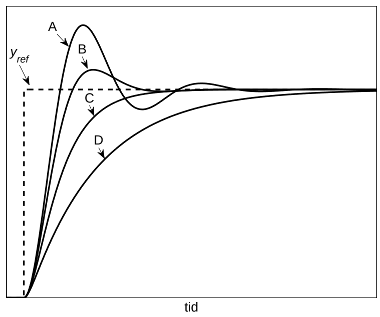
(c) Bestäm observatörsförstärkningen $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}^T$ sådan att observatören för systemet (2) får observatörspolerna $-4 \pm i2$. **Svar:** $K =$ ____________________

Lösning:

Uppgift 3

(a) Till vänster nedan visas rotorten för det slutna systemets poler hos ett återkopplat system, med avseende på en regulatorparameter $K \geq 0$. Till höger visas stegsvaret för det slutna systemet för fyra olika värden på K (y_{ref} är referenssignalen). Det slutna systemet har formen $Y(s) = \frac{b}{s^2+as+b} Y_{ref}(s)$.





Ange vilket av stegsvaren A, B, C och D som hör till vilket värde på parametern K. Motivera!

$K = 0.5$:________; $K = 1$:________; $K = 2$:________; $K = 4$:________

Motivering:

(b) Betrakta systemet $Y(s) = G(s)U(s) + V(s)$, där u och y är systemets in- och utsignaler och v är en mätbar störning. Reglerfelet är $e = y_{ref} - y$. Nedan listas några styrlagar som skulle kunna användas på systemet, samt benämningar för några vanligt förekommande reglerprinciper.

Para ihop benämningarna med korrekt styrlag.

Benämning			**Styrlag**
Framkoppling	∘	∘	$U(s) = \left(2 + \frac{3}{s}\right) E(s)$
PD-reglering	∘	∘	$u(t) = -Lx(t) + my_{ref}(t)$
PI-reglering	∘	∘	$u(t) = 4e(t) + 2\frac{de}{dt}$
Tillståndsåterkoppling	∘	∘	$U(s) = -V(s)$

Ev. motiveringar (ej nödvändiga):

Vid behov kan du fortsätta dina lösningar/motiveringar på detta ark. Markera tydligt vilken uppgift som avses.

Lösningar till tentamen i Reglerteknik I 5hp 2016-03-17

1. (a) Från blockschemat fås

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{2}{s^2-4}\left((K-2)R(s) - K(s+1)(Y(s)+N(s))\right) \\
\Leftrightarrow \quad \left(1+\frac{2K(s+1)}{s^2-4}\right)Y(s) &= \frac{2(K-2)}{s^2-4}R(s) - \frac{2K(s+1)}{s^2-4}N(s) \\
\Leftrightarrow \quad Y(s) &= \frac{\frac{2(K-2)}{s^2-4}}{1+\frac{2K(s+1)}{s^2-4}}R(s) - \frac{\frac{2K(s+1)}{s^2-4}}{1+\frac{2K(s+1)}{s^2-4}}N(s) \\
&= \underbrace{\frac{2(K-2)}{s^2-4+2K(s+1)}}_{=G_r(s)=G_c(s)}R(s) + \underbrace{\frac{-2K(s+1)}{s^2-4+2K(s+1)}}_{=G_n(s)=-T(s)}N(s)
\end{aligned}$$

(b) Polpolynomet är $s^2-4+2K(s+1) = s^2+2Ks+2K-4$. För ett andragradspolynom räcker det att kolla koefficienterna — de ska vara positiva för stabilitet! (För högre gradtal är det ett nödvändigt men inte tillräckligt villkor.) Alltså måste $2K > 0$ och $2K-4 > 0$, d.v.s. $K > 2$ krävs för stabilitet. (Går bra att använda Rouths algoritm också...)
(c) I kursen har två sådana samband nämnts:

- *Resultat 6.2*: Om $T(s)$ är stabil och om $|T(i\omega)| < 1/|\Delta_G(i\omega)|$ för alla ω så är det verkliga slutna systemet garanterat stabilt.
- Låt $Y^0(s)$ vara den verkliga utsignalen och $Y(s)$ modellens utsignal för det återkopplade systemet. Då gäller att $\Delta_Y(s) = S^0(s)\Delta_G(s)$, där $\Delta_Y(s) = (Y^0(s)-Y(s))/Y(s)$ och $S^0(s) = 1/(1+F(s)G^0(s))$.

(Det räcker att ange ett av dessa samband.)

2. (a) Observera att systemet står på observerbar kanonisk form. Därmed fås direkt att $G(s) = \frac{3}{s^2+5s+6}$. Viktfunktionen är

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+5s+6}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s+2} - \frac{3}{s+3}\right] = 3e^{-2t} - 3e^{-3t}.$$

(b) Minimal realisation $\Leftrightarrow$ både styrbart och observerbart (Resultat 8.11). På observerbar kanonisk form $\Rightarrow$ observerbart (Resultat 8.10). Styrbarhet:

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{full rang, och därmed styrbart (Resultat 8.8).}$$

Alltså är (2) en minimal realisation.
(c) Önskat observatörspolynom:

$$(s+4-i2)(s+4+i2) = (s+4)^2 + 2^2 = s^2+8s+20$$

Observatörspolynomet blir

$$\begin{aligned}\det(sI - A + KC) &= \det\left\{\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\right\} \\ &= \det\begin{bmatrix} s+5+k_1 & -1 \\ 6+k_2 & s \end{bmatrix} = s^2 + (5+k_1)s + 6 + k_2,\end{aligned}$$

vilket, när man jämför med det önskade observatörspolynomet, ger

$$\begin{cases} 5 + k_1 = 8, \\ 6 + k_2 = 20, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} k_1 = 3, \\ k_2 = 14, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad K = \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Av rotorten framgår att de två polerna är komplexvärda för $K < 1.8$ och reellvärda för $K \geq 1.8$. Stegsvaren A och B har översläng, medan C och D är helt dämpade. Följaktligen måste A och B höra ihop med $K < 1.8$ och C och D med $K \geq 1.8$. Vidare framgår av rotorten att den relativa dämpningen ζ ökar när K går från 0 till 1.8 (med konstant avstånd till origo), vilket ger att $K = 0.5$ måste höra ihop med A, som har större översläng än B, som i sin tur därmed hör ihop med $K = 1$. Härutöver ger rotorten att den högra polen närmar sig origo när $K \geq 1.8$ ökar. Denna pol är då den dominerande polen, och den gör alltså systemet långsammare för ökande K. Detta leder till att $K = 2$ hör ihop med C, och att $K = 4$ hör ihop med D. Korrekt ihopparning är alltså:

$$A \longleftrightarrow K = 0.5, \quad B \longleftrightarrow K = 1, \quad C \longleftrightarrow K = 2, \quad D \longleftrightarrow K = 4.$$

(b) Korrekt ihopparning är

$$\begin{aligned} \text{Framkoppling} \quad &\leftrightarrow \quad U(s) = -V(s) \\ \text{PD-reglering} \quad &\leftrightarrow \quad u(t) = 4e(t) + 2\tfrac{de}{dt} \\ \text{PI-reglering} \quad &\leftrightarrow \quad U(s) = \left(2 + \tfrac{3}{s}\right) E(s) \\ \text{Tillståndsåterkoppling} \quad &\leftrightarrow \quad u(t) = -Lx(t) + my_{ref}(t) \end{aligned}$$