1RT490 Reglerteknik I 5hp
Tentamen: Del B

Tid: Torsdag 17 mars 2016, kl. 13.00-16.00

Plats: Fyrislundsgatan 80, sal 1

Ansvarig lärare: Hans Norlander, tel. 018-4713070. Hans kommer och svarar på frågor ungefär kl 14.30.

Tillåtna hjälpmedel: Kursboken (Glad-Ljung), miniräknare, Laplace-tabell och matematisk formelsamling.

Skrivningen består av två delar, del A och del B. För att bli godkänd på skrivningen krävs att man är godkänd på del A.
Del B är frivillig och ges endast vid ordinarie tentatillfällen (vid respektive kurstillfällen.)
Preliminära betygsgränser:
Betyg 3: Godkänt på del A
Betyg 4: Godkänt på del A och minst 10 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)
Betyg 5: Godkänt på del A och minst 18 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)

OBS: Svar och lösningar lämnas in på separata papper. Endast en uppgift per ark. Skriv din tentakod på varje ark.

Lösningarna ska vara tydliga och väl motiverade (om inget annat anges). Avläsningar ur diagram behöver inte vara exakta.

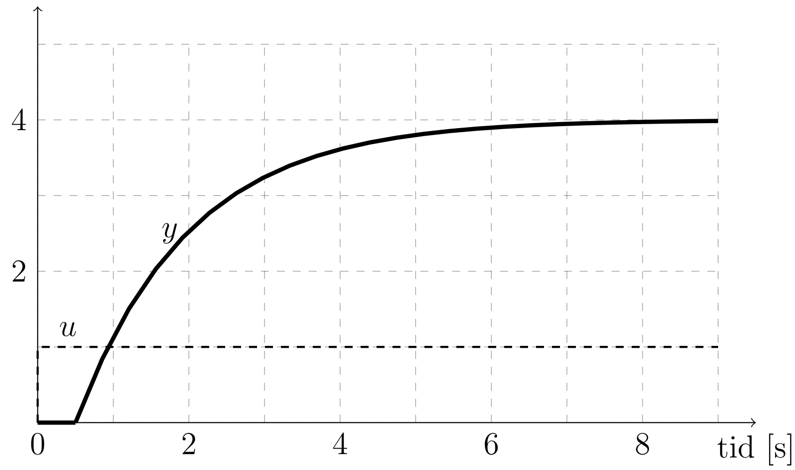
LYCKA TILL!

Uppgift 1 För att kunna analysera och göra modellbaserad regulatordesign för ett system behövs en modell. En vanligt förekommande modell inom processreglering är den så kallade KLT-modellen:

$$Y(s) = G(s)U(s), \qquad G(s) = \frac{K}{1+sT} \cdot e^{-Ls}. \tag{1}$$

Benämningen "KLT-modell" kommer av de tre modellparametrarna, förstärkningen K, tidsfördröjningen L och tidskonstanten T.

(a) KLT-modellen går enkelt att bestämma med ett stegsvarsexperiment. Nedan visas stegsvaret för ett system som beskrivs av modellen (1) — insignalen u (streckad) är ett enhetssteg vid $t = 0$.



Bestäm de numeriska värdena för K, L och T med hjälp av stegsvaret. **(1p)**

(b) En metod för att ställa in parametrarna i en PI-regulator, och som baseras på KLT-modellen (1), är "lambdametoden". Metoden går ut på att få kretsförstärkningen att bli

$$G_o(s) = \frac{1}{L+\lambda} \cdot \frac{1}{s} \cdot e^{-Ls}, \tag{2}$$

där $\lambda > 0$ är en designparameter. Hur ska K_p och K_i väljas i PI-regulatorn

$$U(s) = F_{PI}(s)(R(s) - Y(s)), \qquad F_{PI}(s) = K_p + \frac{K_i}{s},$$

så att den, när den används på (1), ger kretsförstärkningen i (2)? **(1p)**

(c) Ett system (annat än det i (a)) beskrivs av (1) med parametervärdena $K = 3$, $L = 1$ och $T = 4$. Föreslå en regulator $F(s)$ sådan att

1. kretsförstärkningen får skärfrekvensen $\omega_c = 1$ rad/s,
2. fasmarginalen $\varphi_m \geq 55°$,
3. samt att stegsvarets kvarvarande fel elimineras helt

när styrlagen $U(s) = F(s)(R(s) - Y(s))$ används. **(3p)**

Uppgift 2 En tillståndsbeskrivning för ett system (utan direktterm) kan skrivas

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \tag{3}$$

(a) Anta att

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bestäm L och m i tillståndsåterkopplingen $u(t) = -L\hat{x}(t) + mr(t)$ så att reglerfelet $e(t) = r(t) - y(t)$ avtar som $p(t)e^{-3t}$ hos stegsvaret för det slutna systemet. Här är $p(t)$ är ett polynom i t. ($\hat{x}$ är skattningen av x, som fås från en observatör.) **(3p)**

(b) Bestäm matrisexponentialfunktionen e^{At} för matrisen A i (a). **(1p)**

(c) Enligt definitionen[1] är en vektor $x^* \in \mathbb{R}^n$ styrbar om det finns en insignal $u(t)$ sådan att $x(t_1) = x^*$, för något $0 < t_1 < \infty$, hos systemet (3) då $x(0) = 0$. Definiera kolonnvektorn $v(t)$ på följande sätt:

$$v(t) = e^{A(t_1 - t)}B.$$

Bilda den konstanta matrisen

$$W = \int_0^{t_1} v(\tau)v^T(\tau)d\tau.$$

Man kan visa att $\det(W) \neq 0$ precis då systemet (3) är styrbart. Vi antar nu att så är fallet, d.v.s. att $\det(W) \neq 0$. Visa att insignalen $u(t) = v^T(t)W^{-1}x^*$, när den används på systemet (3), gör så att $x(t_1) = x^*$ då $x(0) = 0$. **(1p)**

Uppgift 3 Ange för vart och ett av följande påståenden ifall det är sant eller falskt.

(a) För systemet $Y(s) = \frac{1}{s}U(s)$, där $u(t) = y(t) = 0$ för $t < 0$, blir utsignalen $y(t) = 1 - \cos t$, då $u(t) = \sin t$ för $t \geq 0$.

(b) För systemet $Y(s) = \frac{2}{s^3+1}U(s)$ blir utsignalen $y(t) = \sqrt{2}\sin(t + \pi/4)$ efter lång tid, då $u(t) = \sin t$.

(c) Alla tillståndsmodeller som är asymptotiskt stabila är också insignal-utsignalstabila.

(d) Alla minfassystem är insignal-utsignalstabila.

(e) Alla insignal-utsignalstabila system är minimumfas.

Varje rätt svar ger +1 poäng och varje felaktigt svar ger -1 poäng (och utelämnat svar ger noll poäng). Totalt ger dock uppgiften minst 0 poäng. Ingen motivering behövs — enbart svaren 'sant' och 'falskt' kommer att beaktas. **(5p)**

[1] Definition 8.3 i kursboken.

Uppgift 4 Känslighetsfunktionerna har flera viktiga tolkningar för ett återkopplat system. Bland annat ger de information om hur modellfel påverkar det slutna systemet.

(a) En typisk modellförenkling som man ofta gör, och som bidrar till modellfelet, är att man bortser från snabb dynamik. Anta att man har *modellen* $G(s)$, men att det *verkliga* systemet har överföringsfunktionen

$$G^0(s) = G(s)\frac{1}{1+\tau s}, \qquad \tau > 0,$$

där τ är en tidskonstant som är betydligt mindre än övriga tidskonstanter i $G(s)$. Detta τ svarar alltså mot en snabb pol som man inte har med i modellen $G(s)$. Bestäm det *relativa modellfelet*, $\Delta_G(s)$, i detta fall. **(1p)**

(b) Bestäm $\sup_\omega |\Delta_G(i\omega)|$, d.v.s. ange en övre gräns för hur stort beloppet av frekvenssvaret för det relativa modellfelet i (a) kan bli. **(2p)**

(c) Känslighetsfunktionen definieras ju som $S(s) = \frac{1}{1+G_o(s)}$, där $G_o(s)$ är kretsförstärkningen. Ett vanligt önskemål vid regulatordesign är att man vill uppnå

$$|S(i\omega)| < M_S, \quad \text{för alla} \quad \omega.$$

M_S anger alltså en övre gräns på hur stor $S(s)$ får bli. Detta villkor är ekvivalent med att Nyquistkurvan, $G_o(i\omega)$, $0 \leq \omega < \infty$, måste ligga *helt utanför* en viss cirkel i det komplexa talplanet. Ange centrum och radie för denna cirkel, uttryckt i M_S. **(2p)**

Lösningar till tentamen i Reglerteknik I 5hp, del B 2016-03-17

1. (a) Insignalen u = enhetssteg $\Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$. Därmed blir stegsvaret

$$Y(s) = \frac{K}{s(1+sT)} \cdot e^{-Ls} \quad \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} \quad y(t) = \begin{cases} 0 & \text{för } t < L, \\ K\left(1 - e^{-\frac{t-L}{T}}\right) & \text{för } t \geq L. \end{cases}$$

Detta ger att $y(\infty) = K$ och att $y(T+L) = K(1-e^{-1}) = 0.63K$. Stegsvaret ger att $y \to 4$ när $t \to \infty$, d.v.s. $K = 4$, och att $y = 0.63K = 2.52$ för $t = 2$ sekunder, vilket ger att $T + L = 2$. Vidare ser vi att $y = 0$ för $t \leq 0.5$, så $L = 0.5$ sekunder. Alltså är $K = 4$, $L = 0.5$ och $T = 2 - L = 1.5$.

(b) Med $F_{PI}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p s + K_i}{s}$ blir kretsförstärkningen

$$G_o(s) = F(s)G(s) = \frac{K_p s + K_i}{s} \cdot \frac{K}{1+sT} \cdot e^{-Ls} = KK_i \frac{1 + \frac{K_p}{K_i}s}{s(1+sT)} \cdot e^{-Ls},$$

vilket ska jämföras med den önskade $G_o(s) = \frac{1}{L+\lambda} \cdot \frac{1}{s} \cdot e^{-Ls}$. Genom att välja $K_p/K_i = T$ förkortas polen och nollstället bort, och den önskade $G_o(s)$ fås då med

$$KK_i = \frac{1}{L+\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad K_i = \frac{1}{K(L+\lambda)} \quad \text{och} \quad K_p = TK_i = \frac{T}{K(L+\lambda)}.$$

(c) Systemet har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{K}{1+sT} \cdot e^{-Ls} = \frac{3}{1+4s} \cdot e^{-s}.$$

Därmed är

$$|G(i\omega_c)| = \frac{K}{|1+i\omega_c T|}|e^{-i\omega_c L}| = \frac{K}{\sqrt{1+(\omega_c T)^2}} = \frac{3}{\sqrt{1+4^2\omega_c^2}} = \frac{3}{\sqrt{17}} = 0.723,$$

$$\begin{aligned} \arg G(i\omega_c) &= \arg \frac{K}{1+i\omega_c T} + \arg e^{-i\omega_c L} = -\arctan \omega_c T - \omega_c L \\ &= -\arctan 4\omega_c - \omega_c = \arctan 4 - 1 = -133°. \end{aligned}$$

Det är alltså 47° kvar till −180° vid den önskade $\omega_c = 1$ rad/s, så för att få den önskade $\varphi_m \geq 55°$ måste $F(s)$ skjuta till +8° vid $\omega_c \Rightarrow$ använd ett leadfilter. För att eliminera stegsvarets reglerfel behövs integralverkan $\Rightarrow$ använd ett lagfilter med $\gamma = 0$. Enligt tumregel väljs $\tau_I = \frac{10}{\omega_c} = 10$. Lagfiltret blir alltså

$$F_{lag}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma} = \frac{10s+1}{10s}.$$

Låt leadfiltret kompensera för lagfiltret genom att ge 6° extra, så totalt ska leadfiltret ge 8° + 6° = 14°. Enligt figur 5.13 väljs $\beta = 0.6$ ($\Rightarrow \varphi_{max} =$ 14°). För att få maxfasen vid den önskade ω_c väljs $\tau_D = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\beta}} = \frac{1}{\sqrt{0.6}} =$

1.29. Slutligen väljs förstäkningen K så att $\omega_c = 1$ rad/s verkligen blir skärfrekvens:

$$1 = |G_o(i\omega_c)| = \frac{K}{\sqrt{\beta}} \cdot |G(i\omega_c)| \quad \Rightarrow \quad K = \frac{\sqrt{\beta}}{|G(i\omega_c)|} = \frac{\sqrt{0.6}}{0.723} = 1.07.$$

Leadfiltret blir då

$$F_{lead}(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1} = 1.07 \cdot \frac{1.29s + 1}{0.6 \cdot 1.29s + 1},$$

och den totala regulatorn $F(s) = F_{lead}(s)F_{lag}(s)$.

2. (a) Notera att tillståndsbeskrivningen är på observerbar kanonisk form, så vi får direkt att öppna systemets överföringsfunktion är $G(s) = \frac{3}{s^2+3s+2}$. Vidare vill vi att reglerfelet $e(t) \to 0$ som $p(t)e^{-3t}$ $\Rightarrow$ vi ska ha en dubbelpol i -3 för det slutna systemet, *samt* statisk förstärkning $= 1$ mellan r och y. Det önskade polpolynomet för det slutna systemet är alltså $\alpha(s) = (s+3)^2 = s^2 + 6s + 9$. Det slutna systemet blir $Y(s) = G_c(s)mR(s)$, där $G_c(s) = \frac{b(s)}{\alpha(s)} = \frac{3}{(s+3)^2}$. Vi vill ha $G_c(0)m = 1 \Rightarrow$ välj $m = \frac{1}{G_c(0)} = 3$. Det faktiska polpolynomet blir

$$\det(sI - A + BL) = \det\begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ 2+3l_1 & s+3l_2 \end{bmatrix} = s^2 + (3+3l_2)s + 2 + 3l_1 + 9l_2,$$

vilket när det jämförs med det önskade polpolynomet ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3 + 3l_2 = 6, \\ 2 + 3l_1 + 9l_2 = 9, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} l_1 = -\dfrac{2}{3}, \\ l_2 = 1. \end{cases}$$

Tillståndsåterkopplingen blir alltså

$$u = -L\hat{x} + mr = -\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \hat{x} + 3r.$$

(b) Utnyttja att $\mathcal{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1}$:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ 2 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+3s+2} & \frac{1}{s^2+3s+2} \\ \frac{-2}{s^2+3s+2} & \frac{s+3}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2} & \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+2} \\ \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+2} & \frac{2}{s+1} + \frac{-1}{s+2} \end{bmatrix}.$$

Inversa Laplacetranformen ger då att

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

(c) Använd Resultat 8.4 (ger tillståndsekvationens lösning); med $x(0) = 0$ fås

$$x(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \int_0^{t1} v(\tau)u(\tau)d\tau,$$

där vi utnyttjat definitionen av kolonnvektorn $v(t)$. Sätt in $u(t) = v^T(t)W^{-1}x^*$ $\Rightarrow$

$$x(t_1) = \int_0^{t_1} v(\tau)v^T(\tau)W^{-1}x^* d\tau = \left(\int_0^{t_1} v(\tau)v^T(\tau)d\tau \right) W^{-1}x^* = WW^{-1}x^* = x^*,$$

där vi utnyttjat definitionen av matrisen W.

3. **(a)** Sant ($\int_0^t \sin\tau d\tau = 1 - \cos t$);
(b) Falskt (systemet är instabilt);
(c) Sant (Resultat 8.6 + 8.7);
(d) Falskt (minfassystem kan ha poler på imaginära axeln);
(e) Falskt (insignal-utsignalstabila system kan ha nollställen i höger halvplan);

4. **(a)** Det relativa modellfelet (se ekv. (6.6) och (6.8) i kursboken) är

$$\Delta_G(s) = \frac{G^0(s) - G(s)}{G(s)} = \frac{G(s)\frac{1}{1+\tau s} - G(s)}{G(s)} = \frac{1}{1+\tau s} - 1 = -\frac{\tau s}{1+\tau s}.$$

(b) Vi har

$$|\Delta_G(i\omega)| = \frac{|i\tau\omega|}{|1+i\tau\omega|} = \frac{\tau\omega}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} < 1, \quad \forall\omega,$$

d.v.s. $\sup_\omega |\Delta_G(i\omega)| = 1$.
(c) Vi vill alltså uppnå

$$\frac{1}{|1+G_o(i\omega)|} < M_S \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{M_S} < |1+G_o(i\omega)| = |G_o(i\omega) - (-1)|,$$

och det ska gälla för alla ω. Högerledet kan tolkas som ett avstånd, nämligen avståndet mellan Nyquistskurvan, $G_o(i\omega)$, och punkten -1 i det komplexa talplanet. Detta avstånd ska enligt olikheten vara större än $\frac{1}{M_S}$, vilket alltså betyder att Nyquistkurvan måste ligga helt utanför cirkeln med centrum i -1 och med radien $\frac{1}{M_S}$.