Tentamenskod	Utbildningsprogram
Klockslag för inlämning	Bordnummer

1RT490 Reglerteknik I 5hp
Tentamen: Del A

Tid: Torsdag 9 juni 2016, kl. 8.00-11.00

Plats: Fyrislundsgatan 80, sal 1

Ansvarig lärare: Hans Norlander, tel. 018-4713070.

Tillåtna hjälpmedel: Kursboken (Glad-Ljung), miniräknare, Laplace-tabell och matematisk formelsamling.

Examinationen består av två delar, del A och del B. För att bli godkänd krävs att man är godkänd på del A, och för detta krävs godkänt på varje uppgift. Del B är frivillig och ges endast vid ordinarie tentatillfällen (vid respektive kurstillfällen).

Preliminära betygsgränser:
Betyg 3: Godkänt på del A
Betyg 4: Godkänt på del A och minst 10 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)
Betyg 5: Godkänt på del A och minst 18 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)

OBS: Svar och lösningar/motiveringar ska skrivas på angiven plats i detta provhäfte, och provhäftet ska lämnas in.
Lösningarna ska vara tydliga och väl motiverade (om inget annat anges).

LYCKA TILL!

Resultat:

Uppg. 1	**Uppg. 2**	**Uppg. 3**	**Del A**
G/U	G/U	G/U	**G/U**
Ev. kommentar från lärare:			

Uppgift 1 En enkel modell av ett fartygs girrörelser ges av tillståndsbeskrivningen[1]

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 10 \end{bmatrix} x(t).$$

Här är insignalen, u, roderutslaget och utsignalen, y, fartygets kursvinkel.

(a) Bestäm *viktfunktionen* från u till y. **Svar:**____________________________

Lösning:

(b) Som en del av en autopilot vill man styra kursen med tillståndsåterkopplingen $u = -L\hat{x} + mr$, där $\hat{x}$ fås från en observatör. Bestäm vektorn L och skalären m i tillståndsåterkopplingen så att det slutna systemet blir

$$Y(s) = \frac{32}{s^2 + 8s + 32} R(s).$$

Svar: $L =$ ____________________________ , $m =$ ____________________

Lösning:

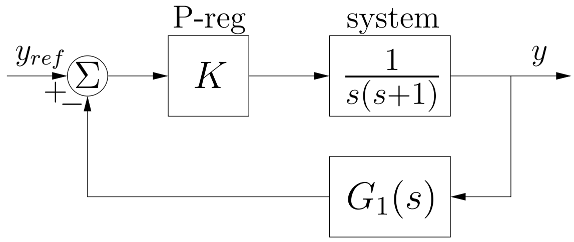
(c) I observatören har observatörsförstärkningen valts till $K = \begin{bmatrix} 5 & 0.6 \end{bmatrix}^T$. Vad blir observatörspolerna?

Svar:____________________________

Lösning:

[1] Här är tidsenheten minuter för att ge “snällare” siffror.

Uppgift 2 Blockschemat nedan visar ett system (DC-motor) som styrs med proportionell återkoppling. Blocket med $G_1(s)$ representerar högre ordnin-



gens dynamik som t.ex. finns i mätgivaren. I uppgifterna (a) och (b) används $G_1(s) = \frac{10}{s+10}$ som modell för detta.

(a) Ange kretsförstärkningen, $G_o(s)$, samt den komplementära känslighetsfunktionen, $T(s)$, då $G_1(s) = \frac{10}{s+10}$.

Svar: $G_o(s) =$ ______________________ , $T(s) =$ ______________________

Lösning:

(b) För vilka $K \in \mathbb{R}$ är det slutna systemet stabilt då $G_1(s) = \frac{10}{s+10}$?

Svar: ______________________

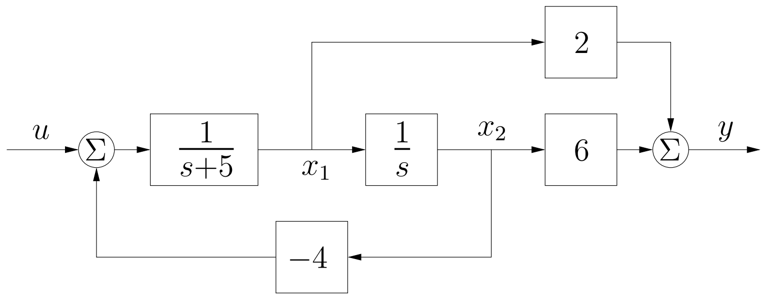
Lösning:

(c) Man kan också representera omodellerad dynamik med det *relativa modellfelet*, $\Delta_G(s)$ (sätt $G_1(s) = 1 \Rightarrow G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$). Det verkliga systemet är då $G^0(s) = G(s)(1 + \Delta_G(s))$. Nu blir $T(s) = \frac{K}{s^2+s+K}$, och $|T(i\omega)| \leq M_T$ för alla ω, där $M_T = K/\sqrt{K - 0.25}$ för $K \geq 0.5$, och $M_T = 1$ för $0 < K < 0.5$.

Om $|\Delta_G(i\omega)| < 0.5$ för alla ω, går det då *garantera* stabiliteten hos det *verkliga* slutna systemet då $K = 2$, då $K = 3$, då $K = 4$ eller då $K = 5$?

Svar:

Uppgift 3 Betrakta systemet i blockschemat nedan.



(a) Ställ upp tillståndsbeskrivningen för systemet med u som insignal, y som utsignal och tillståndsvektorn $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, med x_1 och x_2 enligt blockschemat.

Svar:

(b) Är tillståndsbeskrivningen i (a) en *minimal realisation*? **Svar:**____________

Motivering:

(c) Polplacering är en designteknik, t.ex. för tillståndsåterkoppling. Vilket av följande polpolynom ger *kortast* stigtid, respektive *störst* översläng hos stegvaret?

$$(i)\ s^2 + 4s + 8, \qquad (ii)\ s^2 + s + 4, \qquad (iii)\ s^2 + 11s + 10$$

Svar: Kortast T_r: ____________, störst M: ____________

Motivering:

Vid behov kan du fortsätta dina lösningar/motiveringar på detta ark. Markera tydligt vilken uppgift som avses.

Lösningar till tentamen i Reglerteknik I 5hp 2016-06-09

1. (a) Viktfunktionen är $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$, och

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 \\ -1 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{40}{s(s+4)}.$$

Laplacetabell ger då $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{40}{s(s+4)}\right] = 40 \cdot \frac{1}{4}(1 - e^{-4t}) = 10(1 - e^{-4t})$.

(b) Slutna systemet blir $mG_c(s) = \frac{mb(s)}{\alpha(s)}$, där $b(s)$ är öppna systemets täljare, dvs. $b(s) = 40$ här, och $\alpha(s) = \det(sI - A + BL)$. (Går också bra med $G_c(s) = C(sI - A + BL)^{-1}Bm$.) Här blir

$$\alpha(s) = \det \begin{bmatrix} s + 4l_1 & 4l_2 \\ -1 & s+4 \end{bmatrix} = s^2 + (4 + 4l_1)s + 16l_1 + 4l_2.$$

Identifiering av koefficienter ger att $4 + 4l_1 = 8$ och $16l_1 + 4l_2 = 32 \Leftrightarrow L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}$. Vidare vill vi att $mb(s) = 40m = 32$, så välj $m = 0.8$.

(c) Observatörspolerna ges av $0 = \det(sI - A + KC) = q(s)$. Här blir

$$q(s) = \det \begin{bmatrix} s & 10k_1 \\ -1 & s + 4 + 10k_2 \end{bmatrix} = s^2 + (4 + 10k_2)s + 10k_1 = s^2 + 10s + 50,$$

där sista likheten följer av att $k_1 = 5$ och $k_2 = 0.6$. Observatörspolerna blir alltså $-5 \pm \sqrt{25 - 50} = -5 \pm i5$.

2. (a)

$$G_o(s) = K\frac{1}{s(s+1)}G_1(s) = K\frac{1}{s(s+1)}\frac{10}{s+10} = \frac{10K}{s(s+1)(s+10)},$$

$$T(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{\frac{10K}{s(s+1)(s+10)}}{1 + \frac{10K}{s(s+1)(s+10)}} = \frac{10K}{s(s+1)(s+10) + 10K}.$$

(b) Slutna systemets poler ges av

$$0 = s(s+1)(s+10) + 10K = s^3 + 11s^2 + 10s + 10K,$$

och stabiliteten kan undersökas med Rouths algoritm:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 10 & 0 \\ 11 & 10K & 0 \\ 10 - 10K/11 & 0 & \\ 10K & & \end{array}$$

För stabilitet krävs $10 - 10K/11 > 0$ och $10K > 0$, d.v.s. $0 < K < 11$.

(c) Resultat 6.2: Om $T(s)$ är stabil och om

$$|T(i\omega)| < \frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|} \qquad \forall\omega$$

$\Rightarrow$ det verkliga slutna systemet stabilt. Här är $1/|\Delta_G(i\omega)| > 1/0.5 = 2$, så om $\max|T(i\omega)| = M_T < 2$ är verkliga slutna systemet stabilt. $M_T(K) = \frac{K}{\sqrt{K-0.25}}$

$$\Rightarrow \quad M_T(2) = 1.51, \quad M_T(3) = 1.81, \quad M_T(4) = 2.07, \quad M_T(5) = 2.29.$$

Alltså, garanterat stabilt för $K = 2$ och $K = 3$.

3. (a) Från blockschemat fås dels att $y = 2x_1 + 6x_2$, dels att

$$X_1(s) = \frac{1}{s+5}(U(s) - 4X_2(s)) \quad \Leftrightarrow \quad sX_1(s) = -5X_1(s) - 4X_2(s) + U(s)$$

$$X_2(s) = \frac{1}{s}X_1(s) \quad \Leftrightarrow \quad sX_2(s) = X_1(s).$$

Med inversa Laplacetransformen fås

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 - 4x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \quad y = 2x_1 + 6x_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 2 & 6 \end{bmatrix} x. \end{cases}$$

Detta är styrbar kanonisk form!
(b) Minimal realisation $\Leftrightarrow$ både styrbart och observerbart (Res. 8.11). Styrbar kanonisk form $\Rightarrow$ styrbart. Observerbarhetsmatrisen blir

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -4 & -8 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det \mathcal{O} = 8 \neq 0.$$

Full rang $\Rightarrow$ observerbart (Res. 8.9). Alltså en minimal realisation!
(c) Kolla polerna! För komplexa poler, jämför med "standardformen", $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$, där ω_0 är avstånd till origo och ζ är relativa dämpningen.

$$(i): \ \zeta = \sqrt{0.5},\ \omega_0 = 2\sqrt{2}, \quad (ii): \ \zeta = 0.25,\ \omega_0 = 2, \quad (iii): \text{poler i } -1\&-10.$$

Kortast $T_r \Leftrightarrow$ (dominerande) polerna längst från origo, d.v.s. (i). Störst M $\Leftrightarrow$ komplexa poler med minst ζ, d.v.s. (ii).