OBS: Kontrollera att du har fått rätt tentamen!
Denna tentamen gäller i första hand för Reglerteknik 4.5hp för X3. På sista sidan av tentamen finns ett försättsblad, som ska fyllas i och lämnas in tillsammans med dina lösningar. Ange där hur många (kurs-) poäng du tenterar för.

TENTAMEN
Reglerteknik 4.5hp
X3

Tid: Måndag 8 juni 2009, kl 14.00–19.00

Plats: Polacksbackens skrivsal

Ansvarig lärare: Hans Norlander, tel 018-4713070. Hans kommer och svarar på frågor ungefär kl 15.30 och kl 17.

Tillåtna hjälpmedel: Kursboken (Glad-Ljung), miniräknare, Laplace-tabell och matematisk formelsamling.

Preliminära betygsgränser: 3:[23, 33[, 4:[33, 43[, 5:[43, 50 = maxpoäng]

Uppgift 8 är istället för inlämningsuppgifterna.

OBS: Endast en uppgift per ark. Skriv namn på varje ark.

Lösningarna ska vara tydliga och väl motiverade (om inget annat anges). Avläsningar ur diagram behöver inte vara exakta.

LYCKA TILL!

Uppgift 1 Det insignal-utsignalstabila systemet $Y(s) = G(s)U(s)$ har insignalen $u(t) = 1 + 0.5\sin 2t$. Systemet har statisk förstärkning lika med två, och $G(i2) = 1 - i\sqrt{3}$. Bestäm utsignalen $y(t)$ (då lång tid har gått). **(4p)**

Uppgift 2 Betrakta systemet

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = & Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = & Cx(t), \end{cases} \quad \text{där} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm matrisexponentialfunktionen e^{At} för systemets A-matris. Bestäm också systemets viktfunktion $g(t)$. **(3p)**

(b) Systemet återkopplas från reglerfelet med proportionell återkoppling, $u(t) = K(y_{ref}(t) - y(t))$. För vilka värden på K blir det slutna systemet stabilt? **(3p)**

Uppgift 3

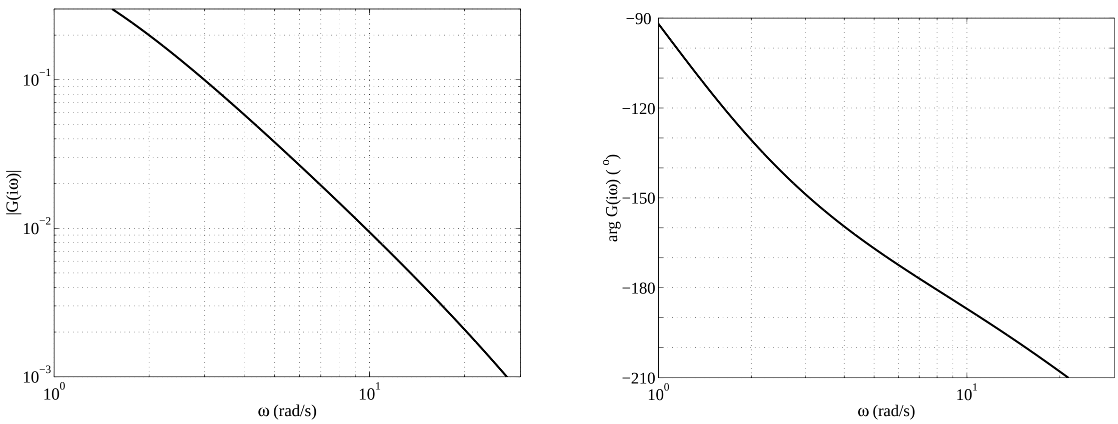
(a) För ett återkopplat system känner man till värdet $|S(i\omega_c)|$, där $S(s)$ är känslighetsfunktionen och ω_c är skärfrekvensen. Om $|S(i\omega_c)| = 1.5$, bestäm värdet för $|T(i\omega_c)|$ så noggrant du kan ($T(s)$ är den komplementära känslighetsfunktionen). **(2p)**

(b) Anta att känslighetsfunktionen $S(s)$ har ett nollställe i punkten $z \in \mathbb{C}$. Ange värdet för den komplementära känslighetsfunktionen i z, d.v.s. bestäm $T(z)$. **(1p)**

(c) Ett sätt att ta hänsyn till att en modell inte beskriver ett system exakt är att införa det relativa modellfelet $\Delta_G(s)$. Man antar då att det sanna systemet beskrivs exakt av $G^0(s) = G(s)(1 + \Delta_G(s))$, där $G(s)$ är modellens överföringsfunktion. Anta att det sanna systemet är $G^0(s) = G(s)\frac{1}{1+\tau s}$. (Detta skulle t.ex. kunna bero på att man inte modellerat systemets snabbare dynamik — ett litet τ svarar mot en snabb pol, längre in i vänster halvplan än övriga poler.) Bestäm det relativa modellfelet $\Delta_G(s)$ för detta fall. Bestäm också det största värdet på $|\Delta_G(i\omega)|$. **(3p)**

Uppgift 4

(a) Nedan visas Bodediagrammet för systemet $Y(s) = G(s)U(s)$. Systemet har ändlig statisk förstärkning, d.v.s. $|G(0)| < \infty$. Dimensionera en regulator



så att följande krav uppfylls: *(i)* kretsförstärkningens skärfrekvens ska vara $\omega_c = 3$ rad/s och fasmarginalen $\varphi_m \geq 45°$, *(ii)* det kvarvarande felet hos stegsvaret ska elimineras helt hos det återkopplade systemet, samt *(iii)* regulatorns förstärkning vid höga frekvenser (när $\omega \to \infty$) får inte vara större än nödvändigt. **(5p)**

(b) Ett leadfilter, $F_{lead}(s) = \frac{\tau_D s+1}{\beta\tau_D s+1}$, kan ses som en lågpassfiltrerad variant av en PD-regulator, $F_{PD}(s) = K_p + K_d s$. För vilket värde på parametern β blir leadfiltret en "ren"/ideal PD-regulator? Vad blir den maximala fasavanceringen (φ_{max}) hos leadfiltret för detta värde på β? **(2p)**

Uppgift 5 Ett system har tillståndsbeskrivningen

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t).\end{aligned}$$

(a) Man konstruerar observatören

$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \big(y(t) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}(t)\big)$$

för systemet. Bestäm observatörspolerna. **(2p)**

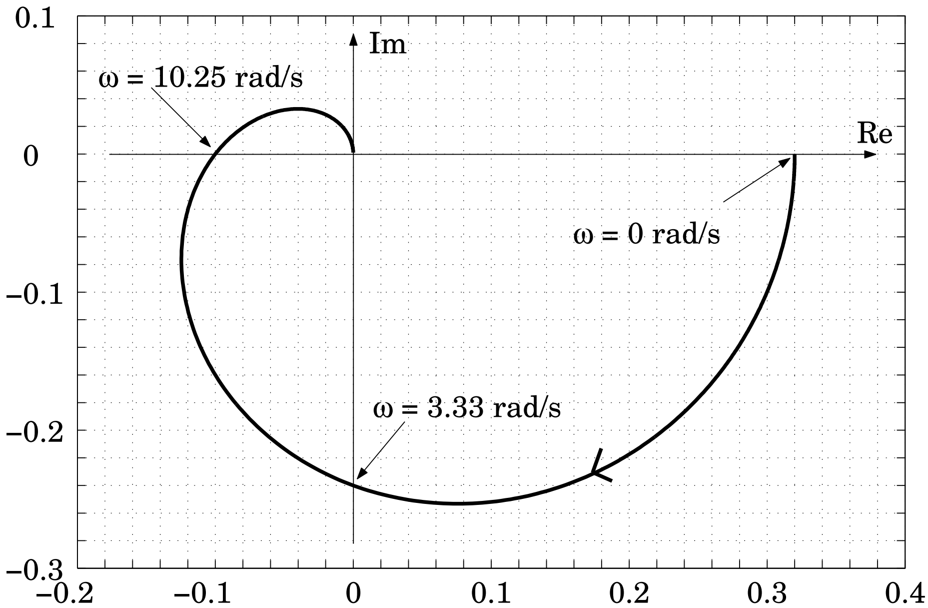
(b) Bestäm L och m så att det slutna systemet blir

$$Y(s) = \frac{8}{s^2 + 4s + 8} Y_{ref}(s)$$

när tillståndsåterkopplingen $u(t) = -Lx(t) + my_{ref}(t)$ används på systemet ovan. **(3p)**

(c) Betrakta nu istället systemet $Y(s) = \frac{3}{s^2+3s+2}U(s)$. Systemet styrs med tillståndsåterkoppling sådan att det slutna systemet har polerna $-3 \pm i2$ och statisk förstärkning lika med ett (från y_{ref} till y). Bestäm hur stort det kvarvarande felet $\lim_{t\to\infty}(y_{ref}(t) - y(t))$ blir då referenssignalen är en ramp, $y_{ref}(t) = t$ för $t \geq 0$. **(2p)**

Uppgift 6 Det stabila systemet $Y(s) = G(s)U(s)$ ska styras med proportionell återkoppling, $U(s) = K(Y_{ref}(s) - Y(s))$. Nedan visas Nyquistkurvan för kretsförstärkningen då $K = 1$ (d.v.s. det är $G(i\omega)$, $0 \leq \omega < \infty$ som visas).



(a) Med $K = 2$ blir det slutna systemet stabilt. Bestäm det kvarvarande felet $\lim_{t\to\infty}(y_{ref}(t) - y(t))$ då $y_{ref}(t)$ är ett enhetssteg. **(2p)**

(b) Om man ökar förstärkningen K successivt kommer det slutna systemet till slut att bli instabilt. Bestäm det värde på K för vilket det slutna systemet upphör att vara stabilt. **(2p)**

(c) Anta att man vill ha skärfrekvensen $\omega_c = 3.33$ rad/s. Bestäm vilket värde på K som ger den önskade skärfrekvensen. Ange också vad fasmarginalen φ_m blir för detta fall. **(3p)**

Uppgift 7 Ange för vart och ett av följande påståenden ifall det är sant eller falskt.

(a) Efter τ tidsenheter har stegsvaret för systemet $Y(s) = \frac{K}{1+\tau s}U(s)$ nått 63% av slutvärdet.

(b) Alla insignal-utsignalstabila system är minimumfas.

(c) Alla minimumfassystem är insignal-utsignalstabila.

(d) Om känslighetsfunktionen har en pol i origo, hos ett system som är återkopplat från reglerfelet, så har dess stegsvar inget kvarvarande fel.

(e) Om insignalen är $u(t) = \sin t$ för systemet $Y(s) = \frac{1}{s^3+1}U(s)$ så blir utsignalen $y(t) = \sqrt{0.5}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ efter lång tid.

(f) Överföringsfunktionen är Laplacetransformen av viktfunktionen.

Varje rätt svar ger +1 poäng och varje felaktigt svar ger -1 poäng (och utelämnat svar ger noll poäng). Totalt ger dock uppgiften minst 0 poäng. Ingen motivering behövs — enbart svaren 'sant' och 'falskt' kommer att beaktas. **(6p)**

Uppgift 8 *Denna uppgift är istället för inlämningsuppgifterna.*
Systemet $Y(s) = \frac{1}{s+1}U(s)$ ska styras med tillståndsåterkoppling med observatör.

(a) Visa att modellen

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) + u(t), \\ y(t) &= x(t), \end{aligned}$$

(där x är en skalär) är en tillståndsbeskrivning för systemet. **(1p)**

(b) Systemet styrs med tillståndsåterkopplingen $u(t) = -l\hat{x}(t) + my_{ref}(t)$, där $\hat{x}$ fås från observatören

$$\dot{\hat{x}}(t) = -\hat{x}(t) + u(t) + k\left(y(t) - \hat{x}(t)\right).$$

(l och k är här skalärer.) Låt $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ (d.v.s. $\tilde{x}$ är skattningsfelet). Inför tillståndsvektorn $x_c(t) = \begin{bmatrix} x(t) & \tilde{x}(t) \end{bmatrix}^T$, så att det återkopplade systemet kan skrivas som

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c y_{ref}(t), \\ y(t) &= C_c x_c(t), \end{cases} \quad \text{där } A_c \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ B_c \in \mathbb{R}^{2\times 1},\ C_c \in \mathbb{R}^{1\times 2}.$$

Bestäm A_c, B_c och C_c i tillståndsbeskrivningen för det slutna systemet ovan (uttryckt i l, m och k). **(3p)**

(c) Bestäm styrbarhetsmatrisen $\mathcal{S}$ och observerbarhetsmatrisen $\mathcal{O}$ för tillståndsbeskrivningen du fått fram i (b) (för det slutna systemet). Visa att tillståndsbeskrivningen är observerbar då $l \neq 0$. Bestäm också det styrbara underrummet för tillståndsbeskrivningen. **(3p)**

Lösningar till tentamen i Reglerteknik 4.5hp 09-06-08

1. (a) Insignalen består av en konstant och en sinussignal, och enligt superpositionsprincipen kommer utsignalen att bli summan av utsignalerna för en ren konstant respektive en ren sinussignal. För konstanten gäller att utsignalen kommer att vara den statiska förstärkningen $G(0) = 2$ gånger insignalen, d.v.s. konstanten 2. För sinussignalen gäller ”sinus in—sinus ut”, så dess del av utsignalen blir $0.5|G(i2)|\sin(2t + \arg G(i2))$. Här är

$$|G(i2)| = \sqrt{1+3} = 2 \quad \text{och} \quad \arg G(i2) = -\arctan\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

Utsignalen blir alltså $y(t) = 2 + \sin\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$.

2. (a) Utnyttja att $\mathcal{L}\left[e^{At}\right] = (sI - A)^{-1}$. Här blir

$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)^2+1}\begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{s+1}{(s+1)^2+1} & \frac{-1}{(s+1)^2+1} \\ \frac{1}{(s+1)^2+1} & \frac{s+1}{(s+1)^2+1} \end{bmatrix} \iff e^{At} = e^{-t}\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Viktfunktionen fås från $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(sI-A)^{-1}B]$$
$$= Ce^{At}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot e^{-t}\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = e^{-t}(2\sin t - \cos t).$$

(b) Det slutna systemet blir $\dot{x} = (A - BKC)x + BKy_{ref}$, $y = Cx$, och polerna ges av

$$0 = \det(sI - A + BKC) = \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + K\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \det\begin{bmatrix} s+1 & 1+2K \\ -1 & s+1-K \end{bmatrix} = (s+1)(s+1-K)+1+2K = s^2+(2-K)s+2+K.$$

(Går också få med $G_c(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$, där $G(s) = C(sI-A)^{-1}B = \mathcal{L}[g(t)]$.) För stabilitet krävs att polerna ligger strikt i VHP, vilket för ett andragradspolynom är ekvivalent med att alla koefficienter är strikt positiva, d.v.s. stabilt för $-2 < K < 2$. (Går också använda Rouths algoritm.)

3. (a) Enligt definition är $S(s) = \frac{1}{1+G_o(s)}$ och $T(s) = \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)}$. Per definition gäller också att $|G_o(i\omega_c)| = 1$, så

$$|T(i\omega_c)| = \frac{|G_o(i\omega_c)|}{|1+G_o(i\omega_c)|} = \frac{1}{|1+G_o(i\omega_c)|} = |S(i\omega_c)|.$$

(Notera att generellt gäller $|1+G_o(i\omega)| \neq 1+|G_o(i\omega)|$ — tänk på triangelolikheten!) Alltså är $|T(i\omega_c)| = 1.5$.
(b) En följd av definitionerna för $S(s)$ och $T(s)$ är att $S(s)+T(s) = 1$ för alla s. Så $S(z) = 0 \iff T(z) = 1$.
(c) Vi har att

$$\Delta_G(s) = \frac{G^0(s) - G(s)}{G(s)} = \frac{G(s)\frac{1}{1+\tau s} - G(s)}{G(s)} = \frac{1}{1+\tau s} - 1 = \frac{\tau s}{1+\tau s}.$$

Beloppet ges av

$$|\Delta_G(i\omega)| = \frac{|i\omega\tau|}{|1+i\omega\tau|} = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} < 1.$$

Därför gäller $0 \leq |\Delta_G(i\omega)| < 1$ där den övre gränsen "nås" när $\omega \to \infty$. Det största värdet är alltså ett.

4. (a) Från Bodediagrammet fås $|G(i3)| = 0.1$ och $\arg G(i3) = -149°$. För att få $\varphi_m \geq 45°$ måste $\arg G_o(i3) \geq -135°$, så regulatorn måste skjuta till $14° \implies$ använd ett leadfilter. För att helt eliminera stegsvarets kvarvarande fel krävs integralverkan i kretsförstärkningen, och eftersom systemet i sig inte har det måste regulatorn ha det $\implies$ använd ett lagfilter med $\gamma = 0$. Enligt tumregeln ($\Rightarrow$ lagfiltret ger fasbidraget $-6°$ vid ω_c) väljs $\tau_I = \frac{10}{\omega_c} = \frac{10}{3} \approx 3.33$. Lagfiltret blir alltså

$$F_{lag}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma} = \frac{3.33s + 1}{3.33s}.$$

För att kompensera för lagfiltret måste leadfiltret totalt skjuta till $14° + 6° = 20°$ för att ge $\varphi_m \geq 45°$. Diagrammet i figur 5.13 ger att $\beta \leq 0.48$ behövs för att få $20°$, och för att uppfylla kravet *(iii)* bör β inte väljas mindre än nödvändigt. Alltså väljs $\beta = 0.48$. För att få maxfas vid ω_c väljs $\tau_D = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\beta}} = \frac{1}{3\sqrt{0.48}} \approx 0.481$. Slutligen väljs K så att skärfrekvensen blir den önskade:

$$1 = |G_o(i\omega_c)| = \underbrace{|F_{lead}(i\omega_c)|}_{=\frac{K}{\sqrt{\beta}}}\underbrace{|F_{lag}(i\omega_c)|}_{=1}|G(i\omega_c)| = \frac{K}{\sqrt{\beta}}|G(i\omega_c)|$$

$$\implies \quad K = \frac{\sqrt{\beta}}{|G(i\omega_c)|} = \frac{\sqrt{0.48}}{0.1} \approx 6.93.$$

Leadfiltret blir alltså

$$F_{lead}(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1} = 6.93\frac{0.481s + 1}{0.48 \cdot 0.481s + 1},$$

och den totala regulatorn är $F(s) = F_{lead}(s)F_{lag}(s)$.
(b) PD-regulator $\iff \beta = 0$ och $\varphi_{max} = 90°$ (se sidan 107 i Glad/Ljung).

5. (a) Observatörspolerna ges av $0 = \det(sI - A + KC)$, och här är $K = \begin{bmatrix}4 & 3\end{bmatrix}^T$. Observatörspolynomet blir alltså

$$\det\left(\begin{bmatrix}s & 0\\0 & s\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-2 & 1\\-6 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix}s+6 & -1\\9 & s\end{bmatrix} = s^2 + 6s + 9,$$

vilket svarar mot en dubbelpol i -3.

(b) Systemet står på observerbar kanonisk form, så dess överföringsfunktion kan ställas upp direkt: $G(s) = \frac{4}{s^2+2s+6}$. Eftersom täljarpolynomet inte påverkas vid tillståndsåterkoppling kommer det slutna systemet att bli $\frac{4m}{s^2+4s+8}$ $\Longrightarrow$ välj $m = 2$. Nämnarpolynomet blir

$$\begin{aligned}\det(sI - A + BL) &= \det\begin{bmatrix}s+2 & -1\\6+4l_1 & s+4l_2\end{bmatrix}\\ &= (s+2)(s+4l_2) + 6 + 4l_1 = s^2 + (2+4l_2)s + 6 + 4l_1 + 8l_2.\end{aligned}$$

Identifiering med de önskade polynomet, $s^2 + 4s + 8$, ger

$$\begin{cases}4 = & 2 + 4l_2,\\ 8 = & 6 + 4l_1 + 8l_2\end{cases} \iff \begin{cases}l_1 = & -0.5,\\ l_2 = & 0.5.\end{cases}$$

Styrlagen blir $u = -\begin{bmatrix}-0.5 & 0.5\end{bmatrix}x + 2y_{ref}$.

(c) Det slutna systemet är $Y(s) = \frac{13}{s^2+6s+13}Y_{ref}(s)$, eftersom täljarpolynomet har gradtal noll, den statiska förstärkningen är ett och polerna är $-3 \pm i2$. Slutvärdesteoremet ger

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}(y_{ref}(t) - y(t)) = \lim_{s\to 0} s(Y_{ref}(s) - Y(s)) &= \lim_{s\to 0} s\left(1 - \frac{13}{s^2+6s+13}\right)Y_{ref}(s)\\ &= \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{s(s+6)}{s^2+6s+13}\cdot\frac{1}{s^2} = \frac{6}{13} \approx 0.46.\end{aligned}$$

6. (a) Slutvärdesteoremet (OK eftersom stabilt) ger

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sS(s)\underbrace{Y_{ref}(s)}_{=\frac{1}{s}} = S(0), \quad \text{där} \quad S(s) = \frac{1}{1+KG(s)}.$$

Nyquistkurvan ger $G(0) = 0.32$ så det kvarvarande felet blir $\frac{1}{1+2\cdot 0.32} = \frac{1}{1.64} \approx 0.61$.

(b) För stabilitet krävs att Nyquistkurvan skär den negativa reella axeln till höger om punkten -1. Här skärs negativa reella axeln i $-0.1K$ (för $\omega = 10.25$ rad/s). Villkoret för stabilitet är alltså $-0.1K > -1 \iff K < 10$. Gränsfallet är alltså $K = 10$.

(c) Nyquistkurvan ger att $G(i3.33) = -i0.24$. För att få $\omega_c = 3.33$ rad/s måste (enligt definitionen) $1 = |G_o(i3.33)| = K|G(i3.33)| = 0.24K$. Alltså ska förstärkningen väljas till $K = \frac{1}{0.24} \approx 4.17$. Med detta K skärs alltså enhetscirkeln på imaginära axeln, så fasmarginalen blir $\varphi_m = 90°$.

7. **(a)** Sant ($y(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$).
(b) Falskt (Motexempel: alla stabila system med nollställen i HHP).
(c) Falskt (Motexempel: systemet med $G(s) = \frac{1}{s}$).
(d) Falskt (Slutna systemet ej insignal-utsignalstabilt).
(e) Falskt (Instabilt system). **(f)** Sant.
8. **(a)** Använd t.ex. formeln $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$. Här är ju $A = B = C = 1$ så $G(s) = \frac{1}{s+1}$. (Eller Laplacetransformera tillståndsbeskrivningen direkt...)
(b) Med $\tilde{x} = x - \hat{x}$ fås dels att

$$\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = -x + u - (\hat{x} + u + k(y - \hat{x})) = -(1+k)(x - \hat{x}) = -(1+k)\tilde{x},$$

dels att $\hat{x} = x - \tilde{x} \implies u = -lx + l\tilde{x} + my_{ref}$. Tillståndsbeskrivningen för slutna systemet blir alltså

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - lx + l\tilde{x} + my_{ref} = -(1+l)x + l\tilde{x} + my_{ref}, \\ \dot{\tilde{x}} &= -(1+k)\tilde{x}, \\ y &= x. \end{aligned}$$

Med $x_c = \begin{bmatrix} x & \tilde{x} \end{bmatrix}^T$ blir detta på matrisform

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= \overbrace{\begin{bmatrix} -(1+l) & l \\ 0 & -(1+k) \end{bmatrix}}^{=A_c} x_c + \overbrace{\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}}^{=B_c} y_{ref}, \\ y &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=C_c} x. \end{aligned}$$

(c) Styrbarhets- och observerbarhetsmatriserna blir

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} B_c & A_cB_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & -m(1+l) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{och} \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} C_c \\ C_cA_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -(1+l) & l \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{O}$ har full rang ($\det \mathcal{O} = l \neq 0$) $\implies$ observerbart (resultat 8.9). Det styrbara underrummet spänns upp av kolonnerna i $\mathcal{S}$ (resultat 8.8) så här spänns det upp av vektorn $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ (det är alltså bara x som påverkas av y_{ref}, inte $\tilde{x}$).