TENTAMEN: DEL B
Reglerteknik I 5hp

Tid: Måndag 18 mars 2013, kl. 12.00-15.00

Plats: Magistern

Ansvarig lärare: Hans Norlander, tel. 018-4713070. Hans kommer och svarar på frågor ungefär kl 13.30.

Tillåtna hjälpmedel: Kursboken (Glad-Ljung), miniräknare, Laplace-tabell och matematisk formelsamling.

Skrivningen består av två delar, del A och del B. För att bli godkänd på skrivningen krävs att man är godkänd på del A.
Del B är frivillig och ges endast vid ordinarie tentatillfällen (vid respektive kurstillfällen.)
Preliminära betygsgränser:
Betyg 3: Godkänt på del A
Betyg 4: Godkänt på del A och minst 10 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)
Betyg 5: Godkänt på del A och minst 18 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)

<u>OBS:</u> Svar och lösningar lämnas in på separata papper. Endast en uppgift per ark. Skriv din tentakod på varje ark.

Lösningarna ska vara tydliga och väl motiverade (om inget annat anges). Avläsningar ur diagram behöver inte vara exakta.

LYCKA TILL!

Uppgift 1 Ett system bestående av två cylindriska vattentankar, båda med ett avrinningshål i botten, är kopplade genom att den ena tanken är placerad ovanför den andra. Därmed hamnar vattnet som rinner ur den övre tanken i den undre tanken. Tankarna fylls på med en pump, och andelen α leds direkt till den undre tanken, medan resterande del, $1-\alpha$, leds till den övre. Systemet har tillståndsbeskrivningen

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1-\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t), \end{aligned}$$

där insignalen u är flödet från pumpen, utsignalen y är nivån i den undre tanken, och $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ är nivåerna i övre respektive undre tanken.

(a) Av fysikaliska skäl gäller $0 \leq \alpha \leq 1$, men i denna uppgift antar vi att alla $\alpha \in \mathbb{R}$ är möjliga. Ange för vilka α som tanksystemet är styrbart. **(2p)**

(b) Anta nu att $\alpha = 0.5$, och att tanksystemet styrs med styrlagen $u(t) = -L\hat{x}(t) + my_{ref}(t)$ där $\hat{x}(t)$ fås med en observatör. Bestäm L och m så att sambandet mellan referenssignal och utsignal blir

$$Y(s) = \frac{2}{s+2} Y_{ref}(s).$$

(3p)

Uppgift 2 Man håller på och moderniserar styrningen av en äldre pappersmaskin, och man stöter då på ett delsystem $Y(s) = G(s)U(s)$ som styrs med en återkopplande regulator, $U(s) = F(s)(R(s) - Y(s))$. Både $G(s)$ och $F(s)$ är okända, och för att ta reda på dessa utför man ett stegsvarsexperiment på det återkopplade systemet och mäter upp $u(t)$ och $y(t)$. Man låter alltså

$$r(t) = 1 \quad \text{för} \quad t \geq 0,$$

och finner då att

$$u(t) = 2 - e^{-t} \quad \text{och} \quad y(t) = 1 - (t+1)e^{-t} \quad \text{för} \quad t \geq 0.$$

För $t < 0$ är $r(t) = u(t) = y(t) = 0$.

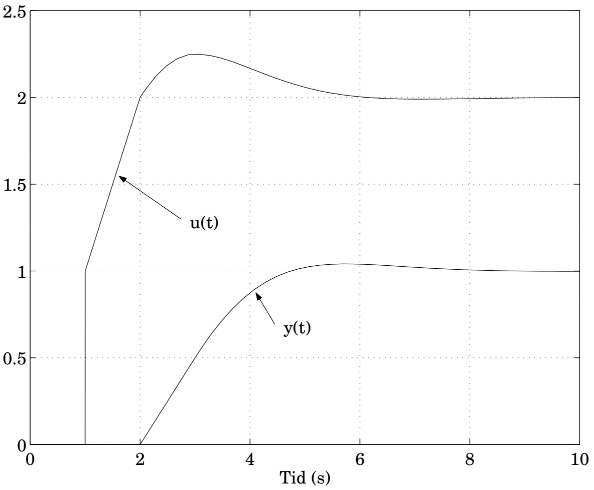
(a) Bestäm viktfunktionen $g_c(t)$ för det *slutna* systemet. **(1p)**

(b) Bestäm överföringsfunktionen $G(s)$ för systemet. **(2p)**

(c) Bestäm överföringsfunktionen $F(s)$ för regulatorn. **(2p)**

Ledning: Utnyttja Laplacetransformen.

Uppgift 3 Ett system $Y(s) = G(s)U(s)$ styrs med en PI-regulator, d.v.s. styrlagen är $u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau)d\tau$ där $e(t) = y_{ref}(t) - y(t)$. Man gör



ett stegsvarsexperiment på det återkopplade systemet genom att låta $y_{ref}(t)$ vara ett enhetssteg vid tiden $t = 1$ sekund, d.v.s.

$$y_{ref}(t) = \begin{cases} 0 & \text{för } t < 1 \\ 1 & \text{för } t \geq 1 \end{cases}$$

I figuren ovan visas stegsvaren för insignalen $u(t)$ och utsignalen $y(t)$. Ange för vart och ett av följande påståenden ifall det är sant eller falskt.

(a) $K_p = 1$.

(b) Det öppna systemet $G(s)$ innehåller en tidsfördröjning på c:a 1 sekund.

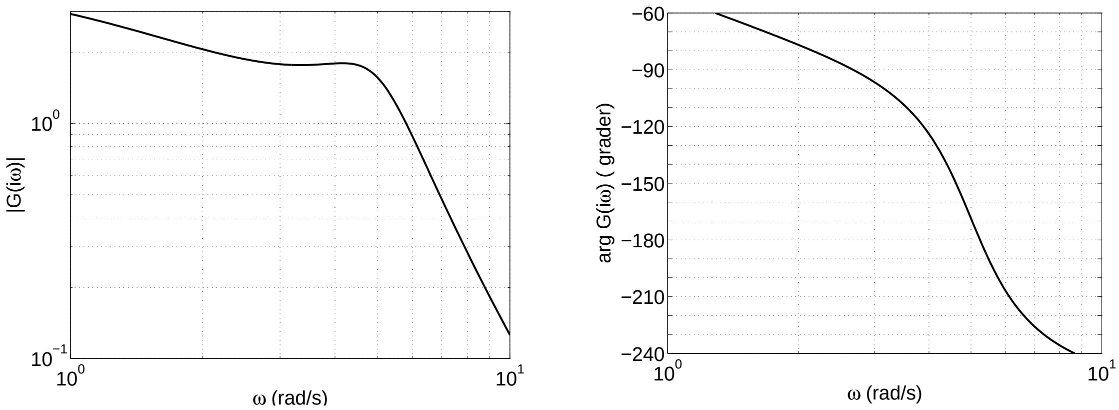
(c) Det öppna systemets statiska förstärkning är ett, d.v.s. $G(0) = 1$.

(d) $K_i = 0$.

(e) Det öppna systemet $G(s)$ har ett nollställe i origo.

Varje rätt svar ger +1 poäng och varje felaktigt svar ger -1 poäng (och utelämnat svar ger noll poäng). Totalt ger dock uppgiften minst 0 poäng. Ingen motivering behövs — enbart svaren 'sant' och 'falskt' kommer att beaktas. **(5p)**

Uppgift 4 Man vill styra ett system $Y(s) = G(s)U(s)$ genom återkoppling från reglerfelet, $U(s) = F(s)(Y_{ref}(s) - Y(s))$. I figurerna nedan visas systemets Bodediagram.



(a) Man prövar först med proportionell återkoppling, så att $F(s) = K$. Vilken är den högsta skärfrekvens ω_c man kan få för systemet med proportionell återkoppling? Det slutna systemet måste vara stabilt. **(1p)**

(b) När man prövar med $F(s) = 0.25$ blir $\lim_{t\to\infty}(y_{ref}(t) - y(t)) = 0.5$ då $y_{ref}(t)$ är ett enhetssteg. Använd denna information och Bodediagrammet ovan för att dimensionera ett lead-lagfilter sådant att följande krav uppfylls:

1. Skärfrekvensen ska vara $\omega_c = 5$ rad/s, och fasmarginalen ska uppfylla $\varphi_m \geq 50°$,
2. $\lim_{t\to\infty}(y_{ref}(t) - y(t)) < 0.01$ då y_{ref} är ett enhetssteg,
3. varken $F(0)$ eller $\lim_{\omega\to\infty}|F(i\omega)|$ får vara större än absolut nödvändigt.

(3p)

(c) Anta att man i stället för kravet 1. i (b) har kravet att *fas-skärfrekvensen* ska vara $\omega_p \approx 6$ rad/s, och att *amplitudmarginalen* ska vara $A_m \geq 2.5$. Beskriv kortfattat hur du skulle gå tillväga för att ta fram ett sådant lead-lagfilter $F(s)$. **(1p)**

Lösningar till tentamen i Reglerteknik I 5hp, del B 2013-03-18

1. (a) Styrbarhetsmatrisen är här

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & -(1-\alpha) \\ \alpha & 1-2\alpha \end{bmatrix},$$

och för styrbarhet krävs att $\mathcal{S}$ har full rang, d.v.s. att $\det \mathcal{S} \neq 0$. Här är

$$\det \mathcal{S} = (1-\alpha)(1-2\alpha) + \alpha(1-\alpha) = (1-\alpha)^2,$$

vilket är noll för $\alpha = 1$. Systemet är alltså styrbart för alla $\alpha \neq 1$.
(b) Vid tillståndsåterkoppling, med eller utan observatör, blir det slutna systemet

$$Y(s) = mG_c(s)Y_{ref}(s), \quad G_c(s) = C(sI-A+BL)^{-1}B = \frac{b(s)}{p(s)}, \quad p(s) = \det(sI-A+BL),$$

och $b(s)$ fås från öppna systemet $G(s) = C(sI-A)^{-1}B = \frac{b(s)}{a(s)}$. Här är

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \frac{0.5s+1}{(s+1)^2}.$$

Alltså är $b(s) = 0.5s + 1 = 0.5(s+2)$. Genom att låta slutna systemet få en dubbelpol i -2 blir

$$Y(s) = m\frac{0.5(s+2)}{(s+2)^2}Y_{ref}(s) = \frac{0.5m}{s+2}Y_{ref}(s).$$

Härav följer att $m = 4$. Vidare är

$$\det(sI-A+BL) = \det \begin{bmatrix} s+1+0.5l_1 & 0.5l_2 \\ -1+0.5l_1 & s+1+0.5l_2 \end{bmatrix} = s^2+(2+0.5l_1+0.5l_2)s+1+0.5l_1+l_2,$$

vilket ska jämföras med det önskade polpolynomet $(s+2)^2 = s^2+4s+4$. Identifiering av koefficienter ger

$$\begin{cases} 2+0.5l_1+0.5l_2 & = 4 \\ 1+0.5l_1+l_2 & = 4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} l_1 & = 2 \\ l_2 & = 2 \end{cases}$$

och alltså är $L = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$ och $m = 4$.

2. (a) Här är enklast att utnyttja att viktfunktionen är tidsderivatan av stegsvaret (för enhetssteg), d.v.s.

$$g_c(t) = \frac{d}{dt}y(t) = (t+1)e^{-t} - e^{-t} = te^{-t}.$$

(b) Utnyttja att $G(s) = Y(s)/U(s)$. Här är

$$\begin{aligned} Y(s) &= \mathcal{L}[1-(t+1)e^{-t}] = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s(s+1)^2}, \\ U(s) &= \mathcal{L}[2-e^{-t}] = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1} = \frac{s+2}{s(s+1)} \\ \Rightarrow \quad G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{s(s+1)^2}}{\frac{s+2}{s(s+1)}} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}. \end{aligned}$$

(c) Här utnyttjar vi att $F(s) = U(s)/E(s)$ och att $E(s) = R(s) - Y(s)$, och $r(t)$ är ett enhetssteg så $R(s) = \frac{1}{s}$. Från (b) har vi då att

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{1}{s} - \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1}\right) = \frac{s+2}{(s+1)^2} \\ \Rightarrow \quad F(s) &= \frac{\frac{s+2}{s(s+1)}}{\frac{s+2}{(s+1)^2}} = \frac{s+1}{s}, \end{aligned}$$

d.v.s. en PI-regulator.

3. **(a)** Sant (ty $u(1) = 1$); **(b)** Sant (ty $y(t) = 0$ för $t < 2$.); **(c)** Falskt (ty $\lim_{t\to\infty} u(t) = 2$ och $\lim_{t\to\infty} y(t) = 1$.); **(d)** Falskt (ty $u(t)$ ökar i intervallet $1 \le t \le 2$ fastän reglerfelet är konstant $e(t) = 1$.); **(e)** Falskt (ty $G(0) = 0.5 \neq 0$ — se (c).)

4. **(a)** Vid P-reglering blir kretsförstärkningen $G_o(s) = KG(s)$, och

$$|G_o(i\omega)| = K|G(i\omega)|, \qquad \arg G_o(i\omega) = \arg G(i\omega),$$

d.v.s. faskurvan påverkas ej utan bara beloppkurvan. Enligt Nyquistkriteriet måste $\arg G_o(i\omega_c) > -180^\circ$ för att slutna systemet ska vara stabilt. I Bodediagrammet ser vi att $\arg G(i\omega) > -180^\circ$ för $\omega < 5.2$ rad/s. Alltså måste skärfrekvensen $\omega_c < 5.2$ rad/s.

(b) Krav 1 tillgodoser vi med leadfiltret, krav 2 med lagfiltret, och krav 3 betyder att β och γ inte ska väljas mindre än nödvändigt. Börja med leadfiltret:

Bodediagrammet ger $|G(i5)| = 1.6$ och $\arg G(i5) = -169^\circ$. För att få önskad fasmarginal måste leadfiltret skjuta till $39^\circ + 6^\circ = 45^\circ$ ($+6^\circ$ för att kompensera för lagfiltret). Fig. 5.13 $\Rightarrow$ välj $\beta = 0.17$ (ej mindre p.g.a. krav 3). För att få maxfasen vid den önskade ω_c väljs $\tau_D = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\beta}} = \frac{1}{5\sqrt{0.17}} = 0.485$, och för att $\omega_c = 5$ rad/s verkligen ska bli skärfrekvens väljs $K = \frac{\sqrt{\beta}}{|G(i\omega_c)|} = \frac{\sqrt{0.17}}{1.6} = 0.26$. Leadfiltret blir

$$F_{lead}(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1} = 0.26\frac{0.485s + 1}{0.17 \cdot 0.485s + 1}.$$

Lagfiltret:
Vi vill att

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sS(s)\frac{1}{s} = S(0) < 0.01$$

$$\Leftrightarrow \qquad 99 < G_o(0) = F_{lead}(0)F_{lag}(0)G(0) = \frac{KG(0)}{\gamma} \qquad \Leftrightarrow \qquad \gamma < \frac{KG(0)}{99}.$$

Vi behöver nu $G(0)$, men vi vet att med $F(s) = 0.25$ blir

$$0.5 = \lim_{t\to\infty} e(t) = S(0) = \frac{1}{1 + 0.25G(0)} \qquad \Leftrightarrow \qquad G(0) = 4.$$

Välj $\gamma = 4K/100 \approx 0.01$ (ej mindre p.g.a. krav 3). Enligt tumregel väljs $\tau_I = \frac{10}{\omega_c} = 2$. Lagfiltret blir

$$F_{lag}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma} = \frac{2s + 1}{2s + 0.01},$$

och den totala regulatorn blir $F(s) = F_{lead}(s)F_{lag}(s)$.
(c) Från Bodediagrammet får vi $|G(i6)| = 0.88$ och $\arg G(i6) = -207°$. För att få $\omega_p = 6$ rad/s och $A_m \geq 2.5$ måste vi se till att $|G_o(i6)| \leq 0.4$ och $\arg G_o(i6) = -180°$. Regulatorn måste skjuta till 27° vid $\omega_p = 6$ rad/s, vilket kan ske genom att leadfiltret skjuter till $27° + 6° = 33°$ $\Rightarrow$ välj β och τ_D på sedvanligt vis. K väljs så att $|G_o(i6)| \leq 0.4$, och lagfiltret dimensioneras som vanligt (ev. väljer man $\tau_I = \frac{10}{\omega_p}$).