TENTAMEN: DEL B
Reglerteknik I 5hp

Tid: Fredag 14 mars 2014, kl. 13.00-16.00

Plats: Magistern

Ansvarig lärare: Hans Norlander, tel. 018-4713070. Hans kommer och svarar på frågor ungefär kl 14.30.

Tillåtna hjälpmedel: Kursboken (Glad-Ljung), miniräknare, Laplace-tabell och matematisk formelsamling.

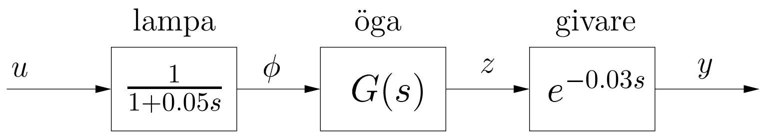
Skrivningen består av två delar, del A och del B. För att bli godkänd på skrivningen krävs att man är godkänd på del A.
Del B är frivillig och ges endast vid ordinarie tentatillfällen (vid respektive kurstillfällen.)
Preliminära betygsgränser:
Betyg 3: Godkänt på del A
Betyg 4: Godkänt på del A och minst 10 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)
Betyg 5: Godkänt på del A och minst 18 poäng på del B (inkl. bonuspoäng)

OBS: Svar och lösningar lämnas in på separata papper. Endast en uppgift per ark. Skriv din tentakod på varje ark.

Lösningarna ska vara tydliga och väl motiverade (om inget annat anges). Avläsningar ur diagram behöver inte vara exakta.

LYCKA TILL!

Uppgift 1 För att kunna upptäcka skador och förändringar på näthinnan används en apparat som fotograferar näthinnan. För att få med hela näthinnan på bilden krävs att pupillens öppning är tillräckligt stor. Detta kan styras genom att man varierar ljusstyrkan i apparatens belysning på ögat. Nedan visas ett blockschema över apparatens lampa, ögat samt en mätgivare som mäter pupillens storlek. Här är ϕ ljusstyrkan (i millilumen), z är pupillens

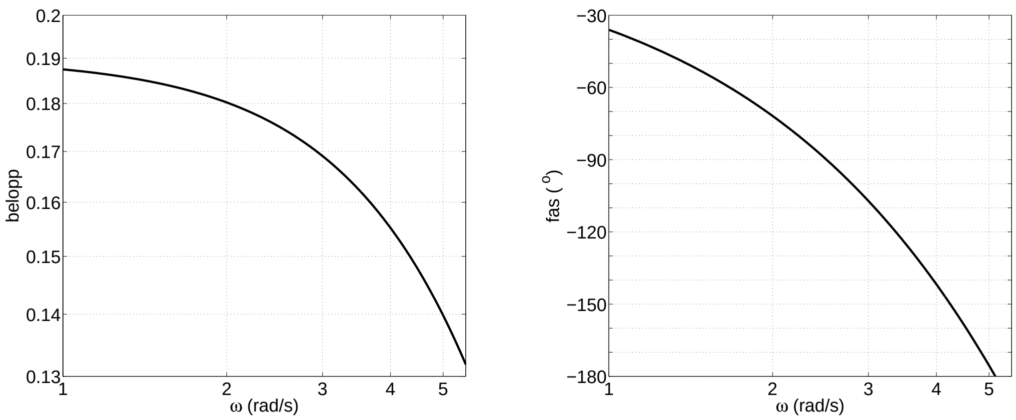


area (i mm^2), y är den av mätgivaren uppmätta pupillarean, och u är effekten till lampan. Själva ögat kan modelleras som

$$Z(s) = G(s)\Phi(s), \quad G(s) = e^{-0.28s}\frac{0.19}{(1+0.09s)^3}.$$

(a) Ange uttryck för belopp och fas för ögats frekvenssvar, d.v.s. $|G(i\omega)|$ och $\arg G(i\omega)$. **(1p)**

(b) Bodediagrammet nedan visar frekvenssvaret för hela systemet i blockschemat, från u till y. Anta att man styr med proportionell återkoppling,



$u = K(y_{ref} - y)$. Om man väljer K så att fasmarginalen blir $\varphi_m = 45°$, hur stort blir då det kvarvarande relativa felet (felkoefficienten)

$$e_0 = \frac{y_{ref} - y_f}{y_{ref}}, \qquad \text{där} \quad y_f = \lim_{t\to\infty} y(t),$$

när y_{ref} är konstant? **(1p)**

(c) Dimensionera nu en regulator $F(s)$ sådan att

1. fasmarginalen blir $\varphi_m \geq 45°$,
2. slutna systemet blir ungefär 25% snabbare än med P-regleringen i (b),
3. kvarvarande felet försvinner helt, d.v.s. $e_0 = 0$,

när styrlagen $U(s) = F(s)(Y_{ref}(s) - Y(s))$ används. **(3p)**

Uppgift 2 Ange för vart och ett av följande påståenden ifall det är sant eller falskt.

(a) Alla minfassystem är insignal-utsignalstabila.

(b) Alla insignal-utsignalstabila system är minimumfas.

(c) Alla asymptotiskt stabila tillståndsmodeller är insignal-utsignalstabila.

(d) Alla insignal-utsignalstabila tillståndsmodeller är asymptotiskt stabila.

(e) Alla tillståndsmodeller som är minimala realisationer är minimumfas.

Varje rätt svar ger +1 poäng och varje felaktigt svar ger -1 poäng (och utelämnat svar ger noll poäng). Totalt ger dock uppgiften minst 0 poäng. Ingen motivering behövs — enbart svaren 'sant' och 'falskt' kommer att beaktas. **(5p)**

Uppgift 3 I ett kraftverk genereras elektrisk energi genom att en turbin, driven av t.ex. vatten eller ånga, i sin tur driver en generator. Växelströmmens frekvens är proportionell mot generatorns rotationshastighet. En förenklad och linjäriserad modell av generatorn ges av momentekvationen,

$$J\ddot{\theta} = M_d + M, \quad \text{där} \quad M = -f\dot{\theta} + K(\omega_n t - \theta).$$

Här är θ generatoraxelns vridningsvinkel, M_d är vridmomentet orsakat av turbinen, och J är generatorns tröghetsmoment. Vidare är ω_n nätfrekvensen, så $\theta - \omega_n t$ anger hur generatorns fas är i förhållande till det övriga kraftnätet.

(a) Ställ upp en tillståndsmodell för generatorn. Använd tillståndsvariablerna $x_1 = \theta - \omega_n t$ och $x_2 = \dot{\theta} - \omega_n$, och låt $u = (M_d - f\omega_n)/J$ vara insignal och $y = \theta - \omega_n t$ utsignal. **(2p)**

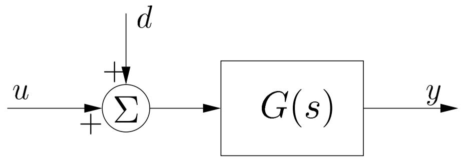
(b) Med ett annat val av tillståndsvariabler blir tillståndsmodellen

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{cases} \quad \text{med} \quad A = \begin{bmatrix} -\frac{f}{J} & -\frac{K}{J} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Även här är $u = (M_d - f\omega_n)/J$ och $y = \theta - \omega_n t$. Visa att tillståndsmodellen ovan är en minimal realisation för alla f, K och $J \neq 0$. **(2p)**

(c) När $y > 0$ levererar generatorn energi till kraftnätet, och när $y < 0$ förbrukar generatorn energi från kraftnätet. Hur stort måste vridmomentet från turbinen, M_d, vara för att generatorn ska leverera energi till kraftnätet (d.v.s. för att få $y > 0$) i stationäritet? (J, f, K och ω_n är positiva konstanter.) **(1p)**

Uppgift 4 Blockdiagrammet nedan visar ett system som påverkas av en laststörning, d.



Systemet styrs med (2DOF-) återkopplingen

$$U(s) = F_r(s)Y_{ref}(s) - F_y(s)Y(s),$$

varmed det slutna systemet går att skriva som

$$Y(s) = G_c(s)Y_{ref}(s) + G_d(s)D(s).$$

(a) Ange överföringsfunktionen $G_d(s)$ ovan, uttryckt i $G(s)$, $F_y(s)$ och/eller $F_r(s)$. **(1p)**

(b) Anta att det uppträder en konstant driftstörning d. Vilken egenskap måste $F_y(s)$ ha för att $y = y_{ref}$ ska gälla i stationäritet? Anta att y_{ref} är konstant och att slutna systemet är stabilt. **(2p)**

(c) För ett visst återkopplat system gäller följande:

- kretsförstärkningen, $G_o(s)$, har ett nollställe, i punkten -12,
- känslighetsfunktionen, $S(s)$, har tre nollställen, i punkterna -1, -2 och -3,
- känslighetsfunktionen har statisk förstärkning $S(0) = 0.04$.

Är känslighetsfunktionen $S(s)$ stabil?
Ledning: Skriv kretsförstärkningen på formen

$$G_o(s) = K\frac{Q(s)}{P(s)} = K\frac{s^m + q_1 s^{m-1} + \cdots + q_m}{s^n + p_1 s^{n-1} + \cdots + p_n}$$

(2p)

Lösningar till tentamen i Reglerteknik I 5hp, del B 2014-03-14

1. **(a)** *[Modellen av ögat kommer från Glad & Ljung, Reglerteknik, avsn. 2.9]*

$$|G(i\omega)| = \left|e^{-i0.28\omega}\right| \frac{0.19}{|1+i0.09\omega|^3} = \frac{0.19}{\left(\sqrt{1+(0.09\omega)^2}\right)^3},$$

$$\arg G(i\omega) = \arg\left(e^{-i0.28\omega}\right) + \arg\frac{0.19}{(1+i0.09\omega)^3} = -0.28\omega - 3\arctan(0.09\omega).$$

(b) Låt $G_1(s)$ beteckna hela systemet så att $Y(s) = G_1(s)U(s)$. Med P-regleringen blir $G_o(s) = KG_1(s) \Rightarrow |G_o(i\omega)| = K|G_1(i\omega)|$ och $\arg G_o(i\omega) = \arg G_1(i\omega)$. Enligt definition gäller $|G_o(i\omega_c)| = 1$ och $\arg G_o(i\omega_c) = -180° + \varphi_m$. Med $\varphi_m = 45°$ gäller då att $\arg G_o(i\omega_c) = \arg G_1(i\omega_c) = -135°$, och från Bodediagrammet fås att $\arg G_1(i\omega) = -135°$ för $\omega = 3.8$ rad/s. Alltså är $\omega_c = 3.8$ rad/s. Vidare ser vi att $|G_1(i3.8)| = 0.157$. Då måste $K = 1/0.157$. Det kvarvarande felet blir

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sS(s)\frac{y_{ref}}{s} = S(0)y_{ref} \quad \Rightarrow \quad e_0 = S(0),$$

och därmed $e_0 = \frac{1}{1+G_o(0)} = \frac{1}{1+KG_1(0)}$. Vi har att $G_1(0) = 0.19$, så $e_0 = \frac{1}{1+0.19/0.157} = 0.45$.

(c) För att få 25% snabbare slutet system än i (b) väljer vi skärfrekvensen $\omega_c = 1.25 \cdot 3.8 = 4.75$ rad/s. Från Bodediagrammet får vi att $|G_1(i4.75)| = 0.144$ och $\arg G_1(i4.75) = -167° \Leftrightarrow 13°$ kvar till $-180°$. För att få $\varphi_m \geq 45°$ måste $F(s)$ lägga till totalt $32°$ i fas vid $\omega_c = 4.75$ rad/s. För att få $e_0 = 0$ krävs integralverkan i $F(s)$, vilket fås med ett lagfilter med $\gamma = 0$. För att kompensera fasen (inkl. lagfiltret) använder vi ett leadfilter som får lägga till $32° + 6° = 38°$. M.h.a. fig. 5.13 väljs $\beta = 0.23$. För att få φ_{max} vid $\omega_c = 4.75$ rad/s väljs $\tau_D = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\beta}} = \frac{1}{4.75\sqrt{0.23}} = 0.44$. För att $\omega_c = 4.75$ rad/s ska bli skärfrekvens väljs $K = \frac{\sqrt{\beta}}{|G_1(i\omega_c)|} = \frac{\sqrt{0.23}}{0.144} = 3.33$. Leadfiltret blir

$$F_{lead}(s) = K\frac{\tau_D s + 1}{\beta\tau_D s + 1} = 3.33\frac{0.44s + 1}{0.23 \cdot 0.44s + 1}.$$

För lagfiltret väljs, som nämnts ovan, $\gamma = 0$, och enligt tumregeln $\tau_I = \frac{10}{\omega_c} = \frac{10}{4.75} = 2.1$. Lagfiltret blir

$$F_{lag}(s) = \frac{\tau_I s + 1}{\tau_I s + \gamma} = \frac{2.1s + 1}{2.1s} \quad \text{och totala regulatorn} \quad F(s) = F_{lead}(s)F_{lag}(s).$$

(I själva verket ger denna regulator dålig reglering, man får $\varphi_m = 6°$ och $\omega_c = 6$ rad/s — undersök gärna själv i MATLAB! Det är tidsfördröjningen $T = 0.31$ s som ställer till det; en tumregel säger att bandbredden bör väljas $\omega_B < 1/T$, dvs här mindre än 3 rad/s, vilket svarar mot $\omega_c < 2$ rad/s.)

2. **(a)** Falskt (minfassystem får ha poler på Im-axeln, men det får ej BIBO-stabila system); **(b)** Falskt (BIBO-stabila system får ha nollställen i HHP, men inte minfassystem); **(c)** Sant (Res. 8.6 + 8.7); **(d)** Falskt (motexempel: $\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$, $y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s+1} U(s)$ — är BIBO-stabilt, men ej asymptotiskt stabilt. Hos icke-minimala realisationer kan instabila poler förkortas bort i $G(s)$.); **(e)** Falskt (begreppen har ej med varandra att göra).

3. **(a)** Vi ser direkt att $\dot{x}_1 = x_2$. Sedan gäller $\dot{x}_2 = \ddot{\theta}$, och från momentekvationen fås då

$$J\dot{x}_2 = M_d - f\dot{\theta} + K(-x_1) = -Kx_1 - f(\dot{\theta} - \omega_n) + M_d - f\omega_n = -Kx_1 - fx_2 + Ju.$$

Totalt har vi då

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{K}{J}x_1 - \frac{f}{J}x_2 + u, \\ y &= x_1, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/J & -f/J \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x. \end{cases}$$

(b) Minimal realisation $\Leftrightarrow$ både styrbar och observerbar (Res. 8.11). Tillståndsmodellen är på styrbar kanonisk form, oavsett f, K och J, och är därför styrbar. Observerbarhetsmatrisen blir

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

och $\mathcal{O}$ har uppenbart full rang , oavsett f, K och J, och därför är modellen alltid observerbar. Alltså är modellen alltid en minimal realisation.
(c) Modellen på styrbar kanonisk form $\Rightarrow$ direkt fås

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad \text{där} \quad G(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{f}{J}s + \frac{K}{J}} \quad \Rightarrow \quad G(0) = \frac{1}{K/J} > 0.$$

I stationäritet är $y = G(0)u$, så för att få $y > 0$ måste $u > 0$ gälla. Följaktligen måste $M_d > f\omega_n$.
[Modellen av generatorn kommer från Glad & Ljung, Reglerteori]

4. **(a)** Vi har $Y(s) = G(s)(U(s) + D(s))$, vilket med $U(s) = F_r(s)Y_{ref}(s) - F_y(s)Y(s)$ insatt ger

$$Y(s) = G(s)F_r(s)Y_{ref}(s) - G(s)F_y(s)Y(s) + D(s).$$

Löser man ut $Y(s)$ får man

$$Y(s) = \frac{G(s)F_r(s)}{1 + G(s)F_y(s)}Y_{ref}(s) + \frac{G(s)}{1 + G(s)F_y(s)}D(s) = G_c(s)Y_{ref}(s) + G_d(s)D(s).$$

(b) Anta för enkelhetens skull att $y_{ref} = 0$, och att $d =$ konstant. Då blir, med slutvärdesteoremet,

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sG_d(s)\frac{d}{s} = G_d(0).$$

För att få $y = 0$ (d.v.s. $y = y_{ref}$) krävs alltså att $G_d(0) = 0$, och för det krävs att $F_y(s)$ har integralverkan, d.v.s. en pol i origo (och att $G(0) \neq 0$). För att se detta, skriv $F_y(s) = \frac{1}{s}F_1(s) \Rightarrow$

$$G_d(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)\frac{1}{s}F_1(s)} = \frac{s}{s/G(s) + F_1(s)}.$$

Därmed blir $G_d(0) = 0$ bara om $F_1(0) \neq 0$ (och $G(0) \neq 0$), d.v.s. bara om $F_y(s)$ har en pol i origo.
(c) Med $G_o(s) = K\frac{Q(s)}{P(s)}$ får vi

$$S(s) = \frac{1}{1 + K\frac{Q(s)}{P(s)}} = \frac{P(s)}{P(s) + KQ(s)}.$$

Av detta följer att $G_o(s) = 0 \Leftrightarrow Q(s) = 0$, samt att $S(s) = 0 \Leftrightarrow P(s) = 0$. Därför är

$$Q(s) = s + 12 \quad \text{och} \quad P(s) = (s+1)(s+2)(s+3) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6.$$

Vidare har vi att

$$S(0) = \frac{1}{1 + KQ(0)/P(0)} \quad \Leftrightarrow \quad K = \frac{P(0)}{Q(0)}(1/S(0) - 1) = \frac{6}{12}(1/0.04 - 1) = 12.$$

Polpolynomet för $S(s)$ är alltså

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + 12(s + 12) = s^3 + 6s^2 + 23s + 150.$$

Stabiliteten kan undersökas med Rouths algoritm:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 23 & 0 \\ 6 & 150 & 0 \\ -2 & 0 & \\ 150 & & \end{array}$$

Två teckenväxlingar $\Rightarrow$ två poler i HHP, instabilt!